



**UNICAMP**

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
INSTITUTO DE FÍSICA GLEB WATAGHIN**

Laura Borges dos Penedos

# **Modos quasinormais e estabilidade de um wormhole minimal**

Campinas - SP

2019

Laura Borges dos Penedos

## **Modos quasinormais e estabilidade de um wormhole minimal**

Dissertação apresentada ao programa de Pós-Graduação do Instituto de Física “Gleb Wataghin” da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestra em Física, na Área de Física.

Orientador: Prof. Dr. Alberto Vazquez Saa

Este exemplar corresponde à versão final da dissertação de mestrado da aluna Laura Borges dos Penedos, orientada pelo Prof. Dr. Alberto Vazquez Saa.

Campinas - SP

2019

Ficha catalográfica  
Universidade Estadual de Campinas  
Biblioteca do Instituto de Física Gleb Wataghin  
Lucimeire de Oliveira Silva da Rocha - CRB 8/9174

P374m Penedos, Laura Borges dos, 1995-  
Modos quasinormais e estabilidade de um wormhole minimal / Laura  
Borges dos Penedos. – Campinas, SP : [s.n.], 2019.

Orientador: Alberto Vazquez Saa.  
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de  
Física Gleb Wataghin.

1. Relatividade geral (Física). 2. Buracos negros (Astronomia). 3. Buracos  
de minhoca (Física). I. Saa, Alberto Vazquez, 1966-. II. Universidade Estadual  
de Campinas. Instituto de Física Gleb Wataghin. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

**Título em outro idioma:** Quasinormal modes and stability of a minimal wormhole

**Palavras-chave em inglês:**

General relativity (Physics)

Black holes (Astronomy)

Wormholes (Physics)

**Área de concentração:** Física

**Titulação:** Mestra em Física

**Banca examinadora:**

Ricardo Antonio Mosna

Flávia Sobreira Sanchez

Maurício Richartz

**Data de defesa:** 19-06-2019

**Programa de Pós-Graduação:** Física

**Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)**

- ORCID do autor: <https://orcid.org/0000-0002-7293-5628>

- Currículo Lattes do autor: <http://lattes.cnpq.br/4766281197980802>



MEMBROS DA COMISSÃO JULGADORA DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DE **LAURA BORGES DOS PENEDOS – RA 146847** APRESENTADA E APROVADA AO INSTITUTO DE FÍSICA “GLEB WATAGHIN”, DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS, EM 19 / 06 / 2019.

**COMISSÃO JULGADORA:**

- Prof. Dr. Ricardo Antonio Mosna – Presidente – IMECC/UNICAMP
- Profa. Dra. Flávia Sobreira Sanchez – DRCC/IFGW/UNICAMP
- Prof. Dr. Maurício Richartz – UFABC

**OBS.:** Informo que as assinaturas dos respectivos professores membros da banca constam na ata de defesa já juntada no processo vida acadêmica do aluno.

CAMPINAS  
2019

### **Dedicatória**

A todos os estudantes que sofrem sem que a sociedade veja e sinta.

A esses colegas, minha mensagem:

Depressão e Ansiedade têm tratamento.

Sonhar vale a pena, é maravilhoso!

E, com o tempo, tudo ficará bem.

# Agradecimentos

Meus mais sinceros agradecimentos ao Luis Fernando, meu LF, por todo amor do mundo, e por acreditar em mim, sempre dizendo que eu era capaz, que eu iria conseguir finalizar a pesquisa e a dissertação. Não há palavras suficientes que expressem o quanto quero te agradecer, só dizer que eu te amo um tantão infinito! Nós conseguimos... Vencemos!

Ao meu pai, Paulo, pela confiança, pelo eterno aprendizado, pelas discussões em Física, Filosofia e ética, pela minha formação como cientista, acadêmica e futura professora. Vamos fazer com a Ciência e a dialética um mundo melhor, mais pensante e crítico! Tamo junto!

A minha mãe, Rosi, por estar sempre presente comigo, sem ter tempo ruim, por preparar bolinho de chuva várias vezes para me animar e incentivar a continuar o trabalho. Tô aqui mamãe, defendendo meu mestrado!

As minhas amigas Paula e Valquiria. Sério, vocês duas são demais! Obrigada pelas conversas e pelo apoio.

Ao Prof. Dr. Alberto Saa, pela orientação e aprendizado, pelo apoio, compreensão e confiança nos momentos que foram difíceis. Obrigada por tudo, de verdade!

Aos funcionários da UNICAMP, que, com seus trabalhos diários, proporcionaram ambiente maravilhoso para o estudo, reflexão e permanência na universidade. Em particular, muitíssimo obrigada aos funcionários da Biblioteca da Física (BIF), eu realmente não tenho palavras para expressar o quanto sou grata pelo imenso apoio e ajuda que vocês me deram nesse período.

À CAPES pelo financiamento do trabalho e auxílio em congressos, escolas e encontros. O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

“Saiba: todo mundo foi neném  
Einstein, Freud e Platão também. Hitler, Bush e Saddam Hussein.  
Quem tem grana e quem não tem.  
Saiba: todo mundo teve infância  
Maomé já foi criança. Arquimedes, Buda, Galileu e também você e eu.” (Arnaldo Antunes)

# Resumo

Wormholes (ou buracos de minhoca, em português) são soluções das Equações de Campo de Einstein conectando duas regiões assintoticamente planas. Para um tipo específico destes objetos, a saber, os wormholes atravessáveis, torna-se possível para um observador atravessá-los, estabelecendo um caminho viável entre as duas regiões assintóticas. Muito embora matéria exótica - que viola as condições usuais de Energia - seja necessária para sustentar tais tipos de objetos, suas geometrias inerentes podem oferecer ferramentas importantes para compreensão de fenômenos mais complexos.

Nesta dissertação de Mestrado, uma classe de wormholes chamada wormholes minimais foi caracterizada em termos do Tensor de Energia-Momento e propriedades geométricas. Um estudo de modos quasinormais também foi feito, de modo a analisar a estabilidade linear destas soluções. O sistema foi perturbado por uma partícula teste escalar não massiva, o que permitiu o cálculo dos modos quasinormais para esta perturbação. Os resultados mais importantes obtidos foram: a expressão para o potencial efetivo para campos escalares testes e análise da estabilidade linear da solução.

**Palavras-chaves:** Relatividade Geral. Buracos Negros. Wormholes.

# Abstract

Wormholes are solutions of the Einstein Field Equations connecting two asymptotically flat regions. For a specifically type of these objects, dubbed traversable wormholes, it is possible to a observer to travel across them, establishing a viable path between the asymptotically flat regions. Even though exotic matter - which violates the usual conditions of Energy Conservation - is required to support such kind of object, their inherent geometries might offer some important tools to comprehend more complex phenomena.

In this M.Sc. dissertation, a class of wormholes namely minimal wormholes was characterized in terms of their Energy-Momentum Tensor and geometry properties. Also, a study of quasinormal modes in these wormholes was made, in order to analyze their linear stability. The system was perturbed by a test massless scalar particle, which permitted us to calculate the quasinormal modes for this perturbation. The most important results obtained were: the expression of effective potential for test scalar fields and the linear stability analysis of the solution.

**Key-words:** General Relativity. Black Holes. Wormholes.

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>12</b>
<b>2</b>	<b>RELATIVIDADE GERAL</b>	<b>14</b>
2.1	Princípios e Postulados	14
2.2	O conceito de singularidade	15
2.3	Condições de Energia	19
2.4	Referenciais na Relatividade Geral	20
2.5	Diagrama de mergulho	21
<b>3</b>	<b>WORMHOLES: UMA REVISÃO</b>	<b>25</b>
3.1	Revisão histórica	25
3.2	Wormholes Atravessáveis	27
3.2.1	Condições de atravessabilidade	28
3.2.2	Tensor de Energia-Momento	30
3.2.3	Estabilidade	32
<b>4</b>	<b>MODOS QUASINORMAIS: UMA REVISÃO</b>	<b>33</b>
4.1	Modos quasinormais e estabilidade	33
<b>5</b>	<b>WORMHOLE MINIMAL</b>	<b>36</b>
5.1	Conteúdo de Matéria-Energia	36
5.2	Potencial Efetivo	40
<b>6</b>	<b>MODOS QUASINORMAIS PARA O WORMHOLE MINIMAL</b>	<b>43</b>
6.1	Equação característica	45
6.1.1	Soluções da equação característica	47
<b>7</b>	<b>DISCUSSÃO E CONCLUSÕES</b>	<b>49</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>50</b>
	<b>APÊNDICE A – HORIZONTES NA MÉTRICA DE DE SITTER: CONCEITOS E DEFINIÇÕES</b>	<b>53</b>
<b>A.1</b>	<b>Referenciais e distâncias</b>	<b>53</b>
A.1.1	Sistema de Coordenadas Comóveis	53
<b>A.2</b>	<b>Espaço-tempo de de Sitter</b>	<b>53</b>

<b>A.3</b>	<b>Universo cosmológico de de Sitter . . . . .</b>	<b>54</b>
A.3.1	Cones de Luz . . . . .	55
A.3.2	Cones de Luz em termos da distância própria . . . . .	55
A.3.3	Observadores Comóveis . . . . .	55
A.3.4	Horizontes Cosmológicos . . . . .	56
A.3.5	Descrição gráfica dos cones de luz e horizontes cosmológicos . . . . .	56

# 1 Introdução

Os chamados wormholes (1) são soluções das Equações de Einstein com propriedades geométricas tais que duas regiões assintoticamente Minkowskianas estejam conectadas geodesicamente. Concebidos inicialmente por Einstein e Rosen (2) nos anos 30 como possíveis descrições para a região interior de certos buracos negros, os wormholes passaram a ser considerados efetivamente como possível conexão entre regiões assintoticamente Minkowskianas por meio de uma garganta a partir dos trabalhos de Morris, Thorne e Yurtsever no final dos anos 80 (3)(4) e que foram intitulados wormholes atravessáveis.

Como será visto em mais detalhes no capítulo 3, os wormholes atravessáveis são aqueles em que é possível um corpo realizar a travessia de uma região assintótica para a outra. As configurações da geometria desta categoria de wormholes requerem, necessariamente, a existência de matéria exótica, ou seja, matéria que não respeita as condições de energia usuais (1), o que é uma importante restrição à existência destes objetos dessa natureza macroscopicamente. Ainda assim, suas características geométricas inerentes são interessantes e podem ser encarados como “toy models” de soluções mais complicadas.

Este trabalho contemplou um estudo do problema de espalhamento de ondas escalares como elaborado em (5), visando uma análise de estabilidade via modos quasinormais e utilizando como geometria o wormhole minimal (6)(7), um tipo específico de wormhole atravessável. De modo habitual, o espalhamento foi estudado na aproximação linear, ou seja, o campo escalar foi considerado um campo de teste sobre a geometria do wormhole. A análise foi elaborada levando-se em conta as questões relativas às condições de contorno no wormhole para as ondas incidentes e espalhadas, de modo a calcular os modos quasinormais. Os cálculos têm como base a solução da Equação de Klein-Gordon para espaço-tempo curvo por meio do potencial efetivo relacionado à métrica. Desta mesma análise, podem-se inferir propriedades de estabilidade (linear) do wormhole, e isto foi também investigado.

Nesta dissertação, o capítulo 2 aborda uma revisão do conteúdo de Relatividade Geral, explicando também os pré-requisitos necessários para dar continuidade à leitura e entendimento dos capítulos subsequentes. Em seguida, no capítulo 3, detalhamos a definição e construção do wormhole atravessável, seguindo o trabalho de Morris e Thorne (4), podendo ser visto como uma revisão deste artigo. Além disso, a definição e uma revisão sobre os modos quasinormais podem ser vistas no capítulo 4. Já os capítulos 5 e 6 estão inteiramente destinados à descrição e desenvolvimento do projeto, envolvendo a construção do wormhole minimal, com base nos trabalhos (6)(7) e, em seguida, o cálculo

---

dos modos quasinormais. Por fim, o capítulo 7 se destina às discussões e conclusões do projeto. O apêndice, que pode ser lido de maneira independente do restante do texto, contém as principais definições sobre horizontes de eventos, conceitos fundamentais para o entendimento físico de um wormhole atravessável.

## 2 Relatividade Geral

A Relatividade Geral foi elaborada por Albert Einstein em 1916 para descrever a física do espaço-tempo (8). Com a hipótese de que o espaço-tempo não é plano e que os corpos caindo sob ação de um campo gravitacional obedecem a geodésica da métrica subjacente (9), Albert Einstein formulou as equações covariantes da Relatividade Geral (2.1), que relacionam a geometria do espaço-tempo, representado pelo tensor de Einstein  $G_{\mu\nu}$ , e o conteúdo de matéria responsável por sustentar aquele espaço-tempo, representado pelo tensor de energia-momento  $T_{\mu\nu}$ . São elas:

$$G_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}, \quad (2.1)$$

em que  $G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}$ , onde  $R_{\mu\nu}$  e  $R$  são o tensor e escalar de Ricci, respectivamente. As equações de campo 2.1 estão expressas nas unidades que definiremos como naturais:  $8\pi G = 1$  e  $c = 1$ . Esta última identidade diz respeito à escolha da unidade de tempo como sendo tal que a velocidade da luz no vácuo seja unitária (8). Neste capítulo, faremos uma breve revisão dos principais pontos da teoria relevantes para os nossos propósitos.

### 2.1 Princípios e Postulados

O entendimento da Relatividade Geral requer uma pequena revisão dos princípios da Relatividade Restrita e do Princípio da Equivalência. A Relatividade Restrita, introduzida por Einstein em 1905, estabeleceu profundas relações entre espaço e tempo a partir da observação de fenômenos eletromagnéticos a partir de diferentes referenciais inerciais. Este conceito se estendeu para além do eletromagnetismo, como relações entre corpos rígidos e relógios (10), levando Albert Einstein a estabelecer os seguintes princípios, conhecidos hoje como postulados da Relatividade Restrita:

Postulado 1 - Princípio da relatividade na Mecânica clássica: Todo sistema que está em movimento uniforme de translação com relação a um sistema inercial é também um sistema inercial. As equações de movimento de qualquer sistema são as mesmas com respeito a todos os referenciais inerciais (11).

Postulado 2 - Princípio da constância da velocidade da luz: “Todo raio de luz se move com mesma velocidade  $c$  constante em quaisquer referenciais inerciais. A velocidade da luz independe de movimentos da fonte de emissão.”(9)

O postulado 1 envolve a ideia de que a Física deve ser a mesma para quaisquer referenciais inerciais. Não há explicação melhor para este postulado do que a seguinte frase

de Albert Einstein, baseada no princípio de Galileu:

“If, using all their equipment, these two physicists were to study all the laws of nature, one in his stationary laboratory and the other in his laboratory on the train, they would discover exactly the same laws of nature, provided that the train is not shaking and is traveling in uniform motion.” (Einstein, 1911)(12).

Já o postulado 2, de maneira simples, significa que a propagação da velocidade da luz não depende nem do movimento da fonte nem do observador (11). Além disso, há também a hipótese que a velocidade de propagação de interações, ou seja, velocidade de sinal, é a mesma em todos os sistemas de referência inerciais e, portanto, uma constante universal  $c$ . Esta ideia é incompatível com os princípios da mecânica newtoniana de que as interações de partículas ocorrem por meio de um potencial, fazendo com que uma alteração particular influencie todas as partículas do sistema instantaneamente. Assim, o Princípio da relatividade já trabalha com a hipótese de que interações instantâneas não existem na natureza (13).

O último princípio a ser revisado nessa seção é o Princípio da Equivalência, o qual é fundamental para o desenvolvimento da Relatividade Geral. Seu enunciado mais simples pode ser expresso por: “Massa inercial e massa gravitacional passiva são idênticas” (14). Como “massa inercial” se entende a constante associada ao corpo que mede a resistência desse corpo à sua própria aceleração. Já “massa gravitacional passiva” entendemos como a constante do corpo que determina a magnitude da força experimentada pelo corpo em um campo gravitacional. A ideia de estas duas quantidades serem equivalentes vem da observação que as acelerações experimentadas por diversos corpos em um campo gravitacional é independente do material que os constitui. Com esse princípio (a “hipótese mais natural”), Albert Einstein iniciou a formulação da Teoria da Relatividade Geral, propondo uma extensão à teoria da Relatividade Restrita de modo a incorporar os fenômenos gravitacionais (14).

## 2.2 O conceito de singularidade

Um dos resultados mais impressionantes da Teoria da Relatividade Geral é a previsão de existência de singularidades do espaço-tempo. A primeira singularidade explícita foi obtida por Karl Schwarzschild em 1916 (15), que encontrou uma solução das Equações de Campo (2.1) no vácuo (ou seja  $T_{\mu\nu} = 0$ ) em que alguns componentes do tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  vão ao infinito, ou seja, divergem para  $r = 2M$  e  $r = 0$ . A solução, apresentada em 2.2, é esfericamente simétrica com relação à origem do sistema de coordenadas e

estática, que significa que os elementos da métrica não dependem variável tempo  $t$ .

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (2.2)$$

em que  $M$  é a massa do objeto massivo,  $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$  e  $r_s$  é o raio de Schwarzschild. Este igual a  $2M$  nas unidades naturais. Essa métrica é a solução mais simples que podemos ter em relação às Equações de Campo, pois corresponde ao campo gravitacional de uma massa pontual, ou seja, “o equivalente na Relatividade Geral ao potencial na Gravitação Universal de Newton” (Saa, 2016) (16).

Na Lei da Gravitação Universal de Newton, o potencial gravitacional é escrito como  $\Phi(r) = \frac{-GM}{r}$  e, de fato, torna-se infinito para  $r = 0$ . Este resultado é esperado, na medida em que a origem do sistema de coordenadas é onde se encontra a massa pontual. Assim, de modo análogo, como  $r = 0$  na métrica de Schwarzschild é a posição do objeto massivo, este ponto deve ser singular.

Em uma tentativa de entender a singularidade  $r = 2M$ , Eddington e Finkelstein (17)(18) reescreveram a métrica de Schwarzschild em novas cordenadas  $(v, r, \theta, \phi)$ , apresentada em (2.3). De modo que o ponto  $r = 2M$  na métrica nas novas coordenadas, 2.4, não se torna singular.

$$v = t + r + 2M \log \left( \left| \frac{r}{2M} - 1 \right| \right) \quad (2.3)$$

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dv^2 + 2drdv + r^2 d\Omega^2 \quad (2.4)$$

A forma mais simples de compreender a métrica de Schwarzschild é por meio dos diagramas dos cones de luz. Os cones de luz são definidos como a trajetória da luz percorrida no espaço-tempo, ou seja, as curvas que obedecem  $ds^2 = 0$ . Por meio deles que podemos obter a estrutura causal do espaço-tempo, já que as linhas dentro do cone de luz definidas como curvas do tipo tempo são as únicas possíveis que um corpo pode experimentar. Esta propriedade decorre diretamente dos Princípios da Relatividade, que, em particular, estabelece uma relação de causa e efeito devido a uma velocidade máxima de propagação de informação. Os detalhes construtivos dos cones podem ser vistos a seguir.

Elaborando  $ds^2 = 0$  em 2.2, temos que  $-\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 = 0$ . Para simplificar a análise, faremos um corte transversal de tal modo que  $\theta$  e  $\phi$  ficam constantes, ou seja,  $d\Omega = 0$ . Assim,  $-\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 = 0$ . Quando  $r \gg 2M$ , então,  $\frac{2M}{r} \rightarrow 0$ , assim,  $-dt^2 + dr^2 = 0$ . Resolvendo esta equação, temos:  $t = \pm r + C$ , onde  $C$  é uma constante de integração. Estas curvam formam os cones de luz para o espaço-tempo de Minkowski (plano). Um esboço pode ser conferido na figura

1. No gráfico é possível ver que a trajetória do corpo se dá na direção de crescimento da coordenada  $t$ . Portanto  $t$  é a coordenada do tipo-tempo na métrica (19).

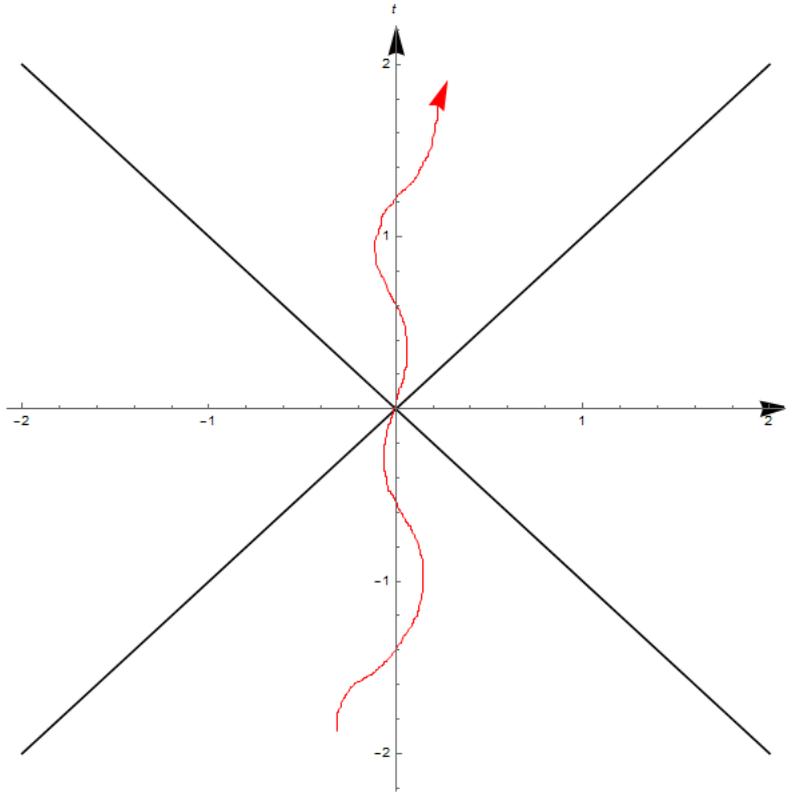


Figura 1 – Gráfico do cone de luz no espaço-tempo de Minkowski. Em vermelho: a trajetória de um corpo por este espaço-tempo.

Por outro lado, quando  $r < 2M$ , temos,  $\left(1 - \frac{2M}{r}\right) < 0$ , o que implica que  $ds^2 = \left(\frac{2M}{r} - 1\right) dt^2 - \frac{1}{\left(\frac{2M}{r} - 1\right)} dr^2$ . Esse caso é curioso, pois a assinatura da métrica se altera, de modo que o sinal negativo vai para a coordenada  $r$ . De fato, como veremos no cone de luz, a trajetória do corpo vai na direção de decréscimo de  $r$ , tornando-a uma coordenada do tipo-tempo, enquanto a coordenada temporal  $t$  passa a ser do tipo-espaço. Uma vez adentrado em  $r < 2M$ , o corpo não consegue mais parar de se mover em direção à singularidade do espaço-tempo,  $r = 0$  (19).

Para representar o cone de luz nesta condição, vamos utilizar as coordenadas de Eddington-Finkelstein, assim, as trajetórias da luz nestas coordenadas são soluções da equação  $-\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dv^2 + 2dvdr = 0 \Rightarrow dv \left[-\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dv + 2dr\right] = 0$ , ou seja,  $v = \text{constante}$  e  $\frac{dv}{dr} = 2\frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} \Rightarrow v(r) = 4M \log|r - 2M| + 2r + D$ , onde  $D$  é constante. Os resultados podem ser vistos na figura 2.

O diagrama dos cones de luz nos mostra que, pela estrutura causal do espaço-tempo, uma vez que um corpo ou mesmo raios de luz atravessam a superfície  $r = 2M$ , torna-se impossível realizar o caminho de volta. De modo que o observador externo,  $r > 2M$ , verá a região  $r \leq 2M$  literalmente como um *buraco negro*, sem receber nenhuma

informação desta região. (20). A superfície  $r = 2M$  é definida como horizonte de eventos, onde uma das características é impedir causalmente que partículas escapem para o exterior (19).

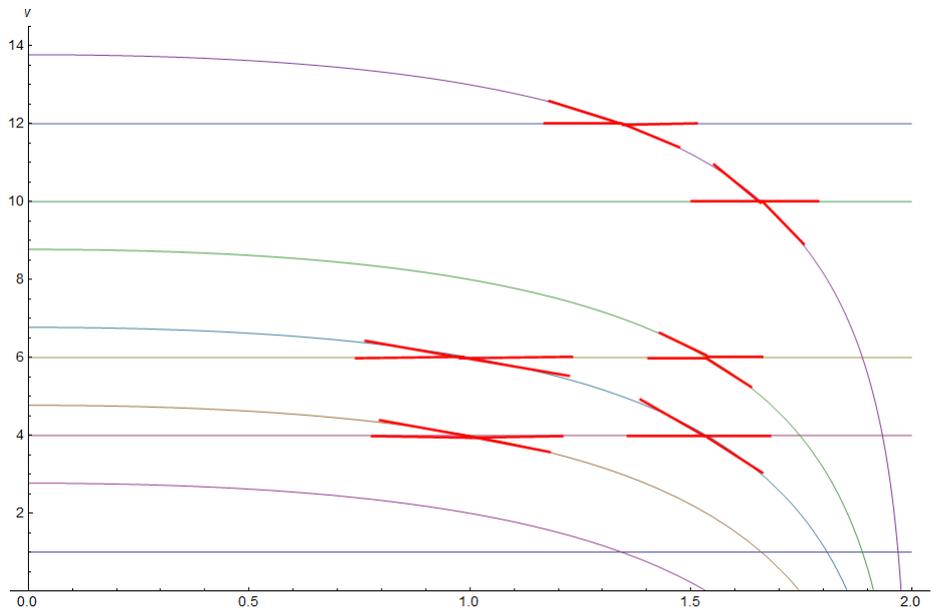


Figura 2 – Esboço das curvas  $v = \text{constante}$  e  $v(r) = 4M \log |r - 2M| + 2r + D$  para  $r < 2M$ . Na interseção destas curvas é onde se formam os cones de luz. Estes estão representados pelas linhas em vermelho. No esboço, escolhemos  $M = 1$  por questões de simplificação.

O horizonte de eventos pode existir em várias soluções das Equações de Campo, não apenas a de Schwarzschild, por exemplo, wormholes e outros tipos de buraco negro, como o de Kerr, que descreve um objeto massivo com momento angular. Muitos estudos sobre singularidade e horizonte de eventos foram feitos por Roger Penrose, que questionou, em particular, se haveria uma relação entre essas duas estruturas. Em seu artigo “Gravitational Collapse: the Role of General Relativity” (20), ele enuncia uma série de teoremas, a saber: “A presença de um horizonte absoluto de eventos implica na presença de alguma forma de singularidade espaço-temporal” e “Se o universo é espacialmente fechado, então, assumindo  $\Lambda \leq 0$ , deve existir uma singularidade espaço-temporal”, onde  $\Lambda$  é a constante cosmológica. Além disso, ao investigar colapso gravitacional, o autor se questiona se no universo haveria um Censor Cósmico tal que proibisse o aparecimento de singularidades nuas, ou seja, não envolvidas por um horizonte absoluto de eventos. Pois a formação de uma singularidade nua permitiria um escape de informações para o universo fora da região do colapso, ou seja, levando à comportamentos não físicos.

O conceito de singularidade é ainda muito discutido na Física atual, inclusive a questão da existência ou não do Censor Cósmico de Penrose constitui de uma das questões em aberto na Relatividade Geral. Também, o estudo de perturbações em singularidades

tem sido alvo de muitas pesquisas atuais. Mais informações sobre horizonte de eventos no contexto de soluções cosmológicas podem ser encontradas no apêndice desta dissertação.

## 2.3 Condições de Energia

As chamadas Condições de Energia para caracterizar fisicamente o tensor de energia-momento surge naturalmente na teoria da Relatividade Geral. A partir de uma métrica, podemos escrever o tensor de Einstein  $G_{\mu\nu}$  e calcular as componentes do tensor de energia-momento,  $T_{\mu\nu}$ , que resolvem as equações. Entretanto, com este modo arbitrário, nem sempre o tensor de energia-momento resultante estará relacionado a fontes reais de matéria e energia (19), entendida como fontes reais, com conteúdo de matéria e energia existente na natureza. Desta maneira, surgem naturalmente condições sobre o  $T_{\mu\nu}$ , reduzindo então a arbitrariedade e ajudando a tornar estas soluções das equações de campo fisicamente plausíveis. Estas restrições devem ser invariantes por transformações de coordenadas, o que implica que são baseadas na construção de escalares, ou seja, na contração de  $T_{\mu\nu}$  com dois vetores. A escolha destes vetores, por sua vez, é o que define as condições de energia. A seguir, definiremos as condições de conservação de energia mais importantes para  $T_{\mu\nu}$ . Usaremos como referência (19). Consideraremos até o final desta seção que  $t^\mu$  é um vetor arbitrário do tipo tempo e  $l^\mu$  um vetor arbitrário nulo. Para ilustração, consideraremos nos exemplos o caso de um tensor de energia-momento diagonal e isotrópico  $T_{\mu\nu} = (\rho, p, p, p)$ . As principais condições de energia são:

**Condição de Energia Fraca:** declara que  $T_{\mu\nu}t^\mu t^\nu \geq 0$  para todos os vetores do tipo tempo  $t^\mu$ , ou seja,  $\rho \geq 0$  e  $p + \rho \geq 0$ , onde  $\rho$  é a densidade total e  $p$  é a pressão.

**Condição de Energia Nula:** declara que  $T_{\mu\nu}l^\mu l^\nu \geq 0$  para todos os vetores nulos  $l^\mu$ , equivalentemente, significa que  $p + \rho \geq 0$ .

**Condição de Energia Dominante:** inclui a Condição de Energia Fraca mais a restrição que  $T_{\mu\nu}t^\mu$  não deve ser um vetor do tipo espaço.

**Condição de Energia Forte:** afirma que  $T_{\mu\nu}t^\mu t^\nu \geq \frac{1}{2}T_\lambda^\lambda t^\sigma t_\sigma$  para todos os vetores  $t^\mu$ , o que implica, no caso de fluido perfeito, em  $\rho + p \geq 0$  e  $\rho + 3p \geq 0$ .

Estas condições são úteis para discutir a viabilidade física de um determinado objeto que é solução das Equações de Einstein. Faremos essa análise para os wormholes e, como veremos, o tensor de energia-momento que sustenta este objeto geométrico não obedece nenhuma das condições de energia, e, portanto, denominaremos esse conteúdo material-energético de exótico.

## 2.4 Referenciais na Relatividade Geral

Um dos conceitos mais relevantes em qualquer teoria de relatividade, inclusive a galileana, é o dos referenciais, dado que os experimentos físicos são observados de maneiras distintas dependendo de qual referencial o observador se encontra. Com isso em mente, esta seção elabora uma revisão dos referenciais mais importantes da Relatividade Geral e como isso afeta a física observada. Utilizaremos este conceito na análise do wormhole atravessável para entender a realidade do observador que faz a travessia, em seu próprio referencial.

O primeiro a ser trabalhado é o referencial inercial, usado amplamente na mecânica newtoniana e na teoria da relatividade restrita. Este referencial é definido como aquele onde um corpo não possui aceleração, quando a força resultante atuando sobre ele é nula. A propriedade básica dos sistemas inerciais é que todos eles são equivalentes, ou seja, a física observada em um referencial inercial específico será a mesma em todos os outros referenciais inerciais (21). Esta característica implica, por exemplo, que se um objeto está acelerado com relação a um sistema inercial, então, ele terá essa mesma propriedade em todos os outros sistemas inerciais. Este último fenômeno já nos mostra que as teorias em que existe esse tipo de referencial possuem o conceito de aceleração absoluta e, portanto, sistemas de referência preferenciais (21). Como a construção da teoria da Relatividade Geral é baseada na reinterpretação de força como propriedade extraída da geometria do espaço-tempo, então, a aceleração deixa de ser absoluta. A primeira implicação formal deste fato é que a Relatividade Geral, por formulação, é uma teoria em que não há referenciais inerciais e, por consequência, sistemas de referência preferenciais (21).

Outro referencial muito importante, principalmente para as teorias de Einstein, é o referencial próprio. Ele trata de um sistema de referência fixado no observador, por mais que este esteja em movimento acelerado. Um exemplo que pode ser colocado são as coordenadas de Rindler, definidas como estando em repouso com um observador uniformemente acelerado no espaço-tempo plano. Este movimento é uma curva hiperbólica no espaço de Minkowski e descrita pela seguinte métrica:

$$ds^2 = -(\alpha x)^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (2.5)$$

em que  $\alpha$  é a aceleração própria medida por um acelerômetro comóvel. As coordenadas  $(t, x, y, z)$  são as coordenadas de Rindler que estão em repouso com o observador de Rindler. Na construção dessa métrica, colocamos  $t$ , da coordenada temporal na trajetória hiperbólica, como sendo o tempo próprio do observador.

O referencial das coordenadas de Rindler acima é um sistema de referência próprio, entretanto, não inercial, justamente por estar em movimento acelerado. Uma propriedade fundamental dos referenciais na teoria da Relatividade Geral está relacionada

aos observadores que estão em queda livre no espaço-tempo (“freely falling observer”, em inglês). Devido ao princípio da equivalência, os referenciais próprios relativos a estes observadores, mesmo não inerciais, são inerciais localmente, já que a queda livre não permite distinção entre a inércia ou o movimento acelerado. Em seu artigo de 1920, “Fundamental Ideas and Methods of the Theory of Relativity, presented in their development”, Albert Einstein escreveu a seguinte reflexão:

“At the moment, I got the happiest thought of my life in the following form: In an example worth considering, the gravitational field has a relative existence only in a manner similar to the electric field generated by magneto-electric induction. Because for an observer in free-fall from the roof of a house there is during the fall — at least in his immediate vicinity — no gravitational field. Namely, if the observer lets go of any bodies, they remain relative to him, in a state of rest or uniform motion, independent of their special chemical or physical nature. The observer, therefore, is justified in interpreting his state as being “at rest.” (Einstein, 1920)(22)

Assim, um referencial próprio de um observador em queda livre, se medido localmente, por exemplo, pelo próprio observador, este enxergará a métrica de Minkowski do espaço-tempo plano. Fisicamente, este fenômeno explicaria a pergunta de curiosos sobre o que um observador pontual sentiria de diferente ao se aproximar de um buraco negro, em queda livre. A resposta é nada, em primeira aproximação, pois localmente ele sempre permaneceu na métrica do espaço-plano. No próximo capítulo, veremos como isso ocorre para um observador em queda livre atravessando um wormhole.

Por fim, o referencial de repouso, muito utilizado na Relatividade Restrita e transformações de Lorentz, é um referencial inercial com velocidade zero.

## 2.5 Diagrama de mergulho

O diagrama de mergulho (ou, *embedding diagram*, em inglês) é uma possibilidade de representar graficamente uma dada geometria do espaço-tempo, a priori quadridimensional, o que é importante para que entendamos melhor a forma geométrica que essa métrica tem. Basicamente, o método consiste em imergir a métrica em um espaço euclidiano de 3 dimensões. Para entender melhor, realizamos o diagrama de mergulho da métrica de Schwarzschild 2.2, que pode ser conferido passo a passo a seguir.

A primeira etapa é considerar que o esboço se passa num instante de tempo  $t$  específico e que estamos trabalhando com uma seção transversal da métrica, ou seja,  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , de tal modo que  $dt = 0$  e  $d\theta = 0$ . Partindo disso, iremos igualar a métrica de Schwarzschild à métrica do espaço plano tridimensional nas coordenadas cilíndricas 2.6,

$$ds^2 = dz^2 + dr^2 + r^2 d\phi^2. \quad (2.6)$$

Entretanto, isso só é possível se  $z$  depender de  $r$ , o que implica que,  $dz^2 = \left(\frac{dz}{dr}\right)^2 dr^2$ . Assim, 2.6 pode ser reescrita da forma  $ds^2 = \left[1 + \left(\frac{dz}{dr}\right)^2\right] dr^2 + r^2 d\phi^2$ . Desse modo, portanto, podemos gerar a equação do diagrama 2.7, igualando a métrica de Schwarzschild com a cilíndrica no espaço plano tridimensional reescrita.

$$\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\phi^2 = \left[1 + \left(\frac{dz}{dr}\right)^2\right] dr^2 + r^2 d\phi^2. \quad (2.7)$$

A solução desta equação é a função  $z(r)$  que satisfaz  $\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} = \left[1 + \left(\frac{dz}{dr}\right)^2\right]$ . Portanto, teremos  $\left(\frac{dz}{dr}\right)^2 = \frac{1}{\frac{r}{r_s} - 1} \Rightarrow z(r) = \pm \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{r}{r_s} - 1}}$ . Resolvendo a integral por uma simples substituição de variável  $u = \frac{r}{r_s} - 1$ , temos  $z(u) = \pm 2r_s \sqrt{u} + C$ , onde  $C$  é uma constante de integração, e, portanto,  $z(r)$  é expresso por:

$$z(r) = \pm 2\sqrt{r_s(r - r_s)} + K, \quad (2.8)$$

no qual  $K$  é uma constante. Assim, ao representar graficamente a função  $z(r)$  em termos de  $r$ , temos uma noção da estrutura espacial da geometria da métrica, em que no nosso caso a de Schwarzschild. Considerando apenas a solução positiva, temos o seguinte gráfico:

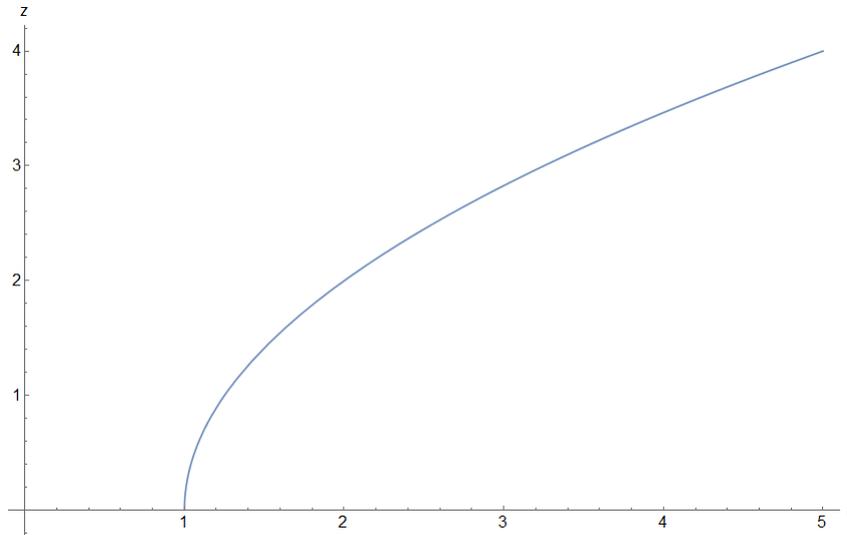


Figura 3 – Esboço da solução positiva  $z(r)$  da equação de diagrama de mergulho, que representa uma folha do buraco negro. No esboço, escolhemos  $r_s = 1$  por questões de simplificação.

Para elaborar o gráfico tridimensional, fizemos pelo *software Mathematica* um diagrama de revolução, em que variamos  $\phi$  de 0 a  $2\pi$ , que está mostrado na figura 4.

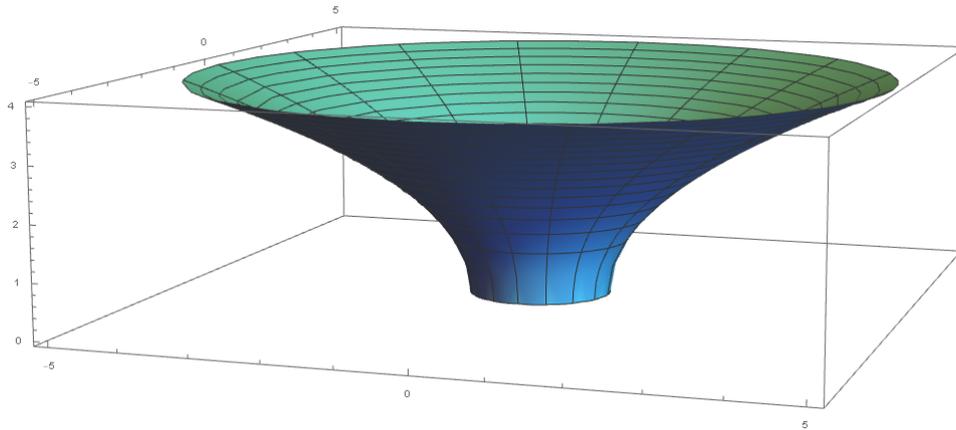


Figura 4 – Diagrama de revolução da solução positiva  $z(r)$  da equação de diagrama de mergulho. Com esse esboço, torna-se claro como é a geometria do buraco negro de Schwarzschild até o horizonte de eventos. No esboço, escolhemos  $r_s = 1$  por questões de simplificação.

Entretanto, se considerarmos também a parte negativa da solução, veremos que a métrica de Schwarzschild não representa apenas um buraco negro. Considerando as duas soluções  $z_1(r) = 2\sqrt{r_s(r - r_s)}$  e  $z_2(r) = -2\sqrt{r_s(r - r_s)}$ , os gráficos das curvas e a figura de revolução terão a seguinte forma:

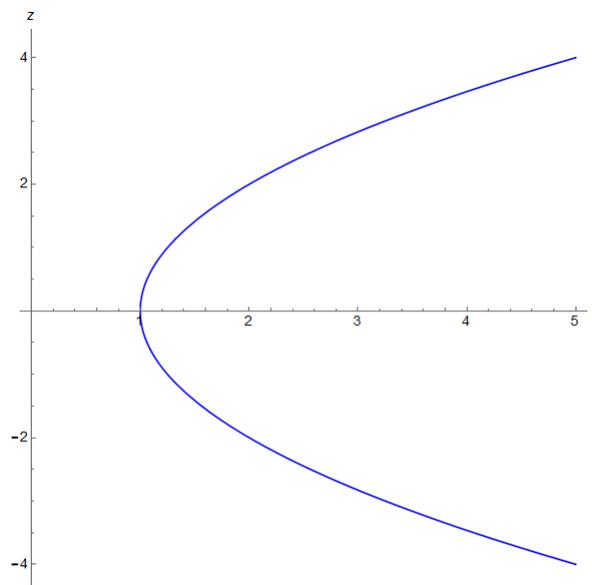


Figura 5 – Gráfico de  $z(r)$  x  $r$  da equação de diagrama de mergulho considerando as soluções positiva e negativa. Este esboço representa uma folha do que chamamos de wormhole de Schwarzschild. No esboço, escolhemos  $r_s = 1$  por questões de simplificação.

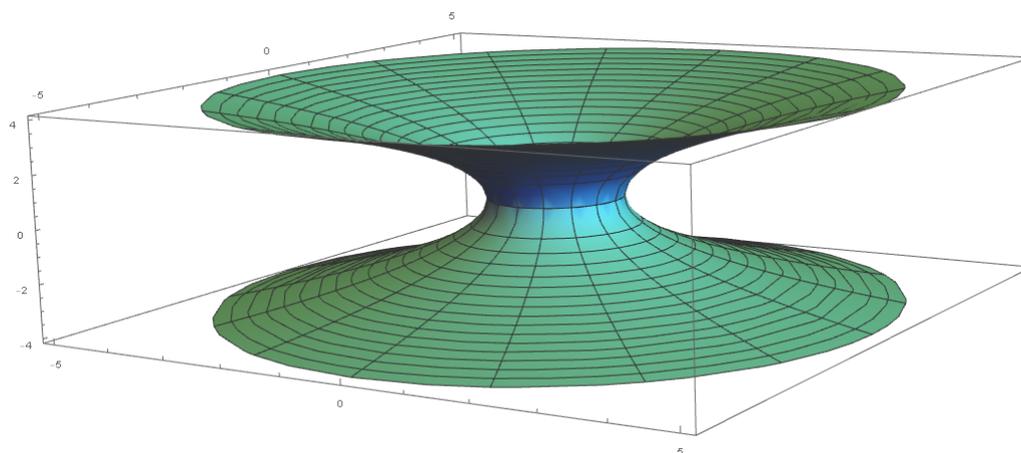


Figura 6 – Diagrama de revolução considerando as soluções  $z_1(r)$  e  $z_2(r)$ . Este gráfico apresenta as características geométricas do wormhole de Schwarzschild. Escolhemos  $r_s = 1$  por questões de simplificação.

Os gráficos 5 e 6 foram derivados da mesma métrica do buraco negro de Schwarzschild, mas possuem geometria topologicamente diferente, que receberá o nome de wormhole, como veremos no próximo capítulo. Deste modo, concluímos que a ferramenta do diagrama de mergulho é de suma importância para conhecer a geometria do espaço-tempo, inclusive encontrar formas topológicas não triviais.

## 3 Wormholes: uma revisão

### 3.1 Revisão histórica

O surgimento do que chamamos atualmente de wormhole é datado de 1935 no artigo escrito por Einstein e Rosen intitulado “Particle Problem in the General Theory of Relativity” (2). A principal motivação dos autores foi compreender se a teoria da Relatividade Geral, que se mostrou eficaz para fenômenos macroscópicos, poderia contribuir para um modelo atômico. A ideia de Einstein e Rosen era elaborar um modelo de partículas que fizesse uso apenas de dados da métrica do espaço-tempo e dos vetores potenciais eletromagnéticos, mas sem que este modelo apresentasse singularidades, pois, do contrário, geraria fenômenos não físicos e traria muita arbitrariedade.

O método utilizado na construção deste modelo consistiu na remoção da singularidade da métrica de Schwarzschild por mudança de variável, muito semelhante ao método de Eddington e Finkelstein e, a partir disso, considerar o eletromagnetismo de Maxwell. O modelo se baseou no espaço-tempo de Schwarzschild, porque como visto na seção anterior, esta métrica representa o campo gravitacional da partícula pontual, análogo ao potencial gravitacional da mecânica newtoniana. Abaixo, segue o método.

Partindo da métrica de Schwarzschild 2.2, vamos elaborar a transformação de coordenada  $u^2 = r - 2M$ , assim,  $2udu = dr \Rightarrow dr^2 = 4u^2 du^2$ . Substituindo  $r$  por  $u$  em 2.2, teremos a seguinte métrica:

$$ds^2 = -\frac{u^2}{u^2 + 2M} dt^2 + 4(u^2 + 2M) du^2 + (u^2 + 2M)^2 d\Omega^2. \quad (3.1)$$

Nessa nova coordenada  $u$ , temos que quando  $r > 2M$ , então,  $u(r)$  possui duas soluções:  $u_1(r) = \sqrt{r - 2M}$  e  $u_2(r) = -\sqrt{r - 2M}$ . Estas curvas estão conectadas pela hipersuperfície  $u(r = 2M) = 0$ . Os autores nomearam esse hipersuperfície de conexão de “ponte” e, a métrica 3.1 ficou conhecida como Pontes de Einstein-Rosen (ou, *Einstein-Rosen bridges*, em inglês). A superfície de revolução das curvas pode ser conferida abaixo:

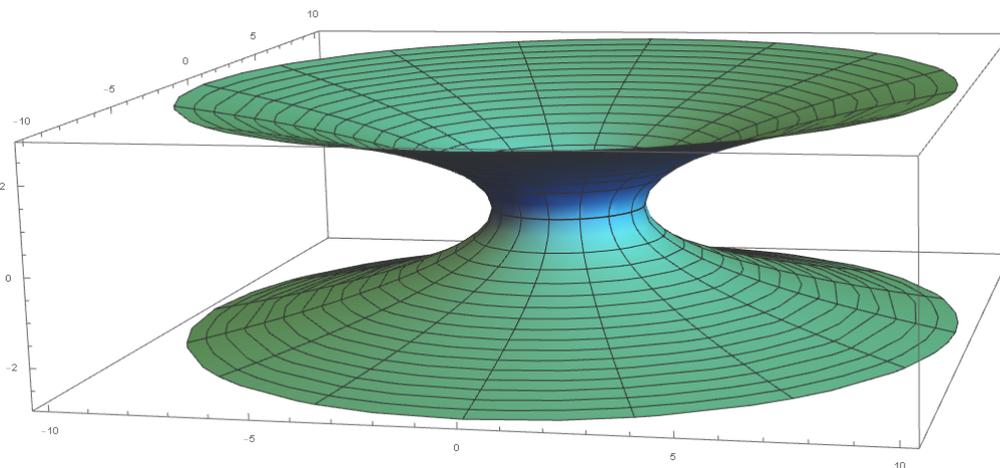


Figura 7 – Curvas das soluções de  $u(r)$  da métrica de Einstein-Rosen. Escolhemos  $M=1$  por questões de simplificação.

A figura 7 possui um resultado bastante interessante, pois o gráfico tem a mesma forma topológica do wormhole de Schwarzschild, definido no capítulo anterior. De tal modo que Einstein e Rosen, na verdade, elaboraram uma espécie de diagrama de mergulho com essa substituição de variável para eliminar a singularidade. As pontes de Einstein-Rosen nada mais são que wormholes de Schwarzschild e que, portanto, possuem horizonte de eventos, mas não singularidades.

Os estudos seguintes às Pontes de Einstein-Rosen se concentraram em sua maioria na análise desta solução em termos de estabilidade. Um dos primeiros trabalhos relacionados a essa questão foi de Wheeler e Fuller na década de 60 que concluíram, ao analisar o wormhole de Schwarzschild nas coordenadas de Kruskal, que este wormhole é instável (23). Não bastasse isso, as forças gravitacionais de maré na garganta deste wormhole são da mesma magnitude do buraco negro de Schwarzschild, o que torna uma viagem entre as duas bocas completamente inviável. Esses fatos nos mostram que o wormhole de Schwarzschild e, conseqüentemente, a Ponte de Einstein-Rosen não pode ser considerado um wormhole atravessável.

Os estudos subsequentes a Einstein e Rosen relacionados a wormholes, como os de Wheeler e as singularidades nuas, propuseram modelos que de forma ou de outra foram contestados como possíveis objetos para uma viagem interestelar. Enquanto os wormholes de Wheeler são da ordem da escala de Planck, os baseados em singularidade nua têm toda a discussão sobre o Censor Cósmico e, além disso, as forças de maré na vizinhança da garganta são letais para um viajante (1).

Foram os físicos Kip Thorne e Michael Morris que retomaram os estudos dos wormholes, mas com finalidade primeira de construir um wormhole em que fosse capaz de realizar viagens entre a garganta. Com intenções pedagógicas de ensinar Relatividade Geral, eles estabeleceram critérios para que torne possível essa travessia e intitularam os

wormholes que obedeciam estes requisitos como wormholes “atravessáveis”.

## 3.2 Wormholes Atravessáveis

O conceito de wormhole atravessável foi inicialmente apresentado pelos trabalhos de Michael Morris e Kip Thorne (4) (3), que se baseiam na possibilidade de que um corpo possa ir de uma região assintótica para a outra por meio do wormhole. Para tanto, foi necessário estabelecer critérios para a solução, como veremos do decorrer deste capítulo.

O primeiro requisito é considerar o modelo incluso na teoria da Relatividade Geral e, portanto, o wormhole precisa obedecer as Equações de Campo de Einstein (2.1). Além disso, na medida em que se trata de um wormhole, a solução precisa ter uma garganta que faz a conexão entre duas regiões assintoticamente planas e, para possibilitar a viagem entre essas regiões, a solução não deve conter nenhum tipo horizonte (Veja apêndice A para mais informações sobre horizontes). Para que um corpo possa realizar esta viagem sem sofrer danos corpóreos, as forças gravitacionais de maré experienciadas pelo corpo devem ser muito pequenas e o tempo próprio deve ser inferior ao tempo de vida do corpo. Finalmente, o wormhole precisa ser perturbativamente estável e para simplificar as contas, é considerado um wormhole esfericamente simétrico e estático.

Partimos de um modelo para uma métrica esfericamente simétrica e estática. O elemento de linha pode ser visto a seguir.

$$ds^2 = -e^{-2\phi(r)}dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{b(r)}{r}}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (3.2)$$

em que  $\phi(r)$  é a função de red-shift, responsável por descrever o quanto a luz curva no ambiente gravitacional e  $b(r)$  é o fator de forma do wormhole, responsável pela geometria do objeto.

Para que entendamos o formato dessa métrica, em termos geométricos, utilizaremos o conceito do diagrama de mergulho, da mesma forma explicitada no capítulo anterior. A métrica de Morris-Thorne com  $t$  e  $\theta$  constantes é:

$$ds^2 = \frac{1}{1 - \frac{b(r)}{r}}dr^2 + r^2d\varphi^2. \quad (3.3)$$

Assim, a função  $z$  das coordenadas cilíndricas fica sendo tal que sua derivada total com relação a  $r$  deve satisfazer 3.4.

$$\frac{dz}{dr} = \pm \left( \frac{r}{b(r)} - 1 \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.4)$$

Entretanto, para que se tenha uma garganta, a coordenada radial  $r$  tem um valor mínimo, representando o raio da garganta  $b_0$ . Nesse ponto,  $b(r) = r = b_0$ ,  $\frac{1}{1-\frac{b(r)}{r}} \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{dz}{dr} \rightarrow \infty$ . Ou seja, já possuímos o comportamento função  $z(r)$  na garganta do wormhole. Com isso em mente, podemos elaborar um esboço de como pode ser o diagrama de mergulho da métrica, considerando  $b(r)$  uma função genérica.

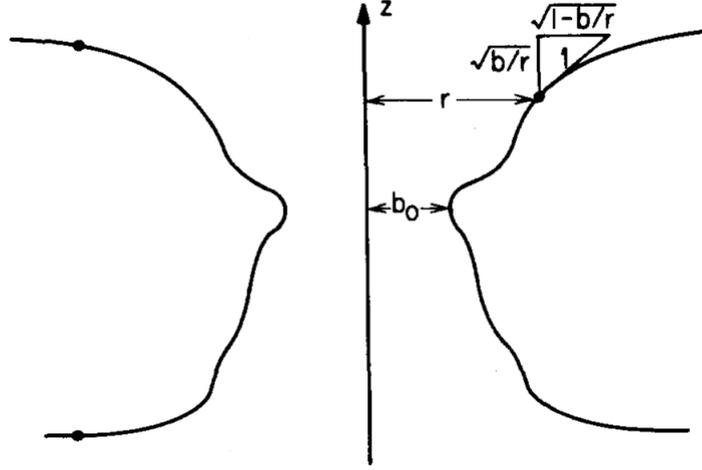


Figura 8 – Esboço da curva de diagrama de mergulho  $z(r)$  para uma função  $b(r)$  genérica. Note que na garganta,  $b(r) = r = b_0$ ,  $\frac{dz}{dr} \rightarrow \infty$ . Figura extraída do artigo de Morris e Thorne (4).

O comportamento  $\frac{dz}{dr}(b_0) \rightarrow \infty$  prejudica a análise das condições de contornos necessárias para um wormhole atravessável, portanto, em algumas aplicações, utilizaremos a coordenada espacial do referencial próprio  $l$  medida por observadores estáticos. A coordenada  $l$  é definida do seguinte modo:

$$dl^2 = \left[1 - \frac{b(r)}{r}\right]^{-1} dr^2 \Rightarrow dl = \pm \left[1 - \frac{b(r)}{r}\right]^{-\frac{1}{2}} dr. \quad (3.5)$$

Portanto,

$$l(r) = \pm \int_{b_0}^r \left[1 - \frac{b(r)}{r}\right]^{-\frac{1}{2}} dr. \quad (3.6)$$

Assim, nesta nova coordenada  $l$ , a posição da garganta é  $l = 0$ , e temos  $-\infty < l < +\infty$  por construção para os principais caso que consideraremos.

### 3.2.1 Condições de atravessabilidade

Para que não tenha horizontes, tanto  $\phi(r)$  quanto  $l(r)$  devem ser finitos por todo o espaço. Além disso, para a solução ser assintoticamente plana: quando  $\frac{b(r)}{r} \rightarrow 0$ , então,  $l \rightarrow \pm\infty$ .

O tempo de travessia no referencial próprio será avaliado para uma viagem com início no ponto  $l = -l_1$ , relativo à região inferior, para o ponto  $l = +l_2$ . A velocidade no referencial próprio e variação do tempo próprio ficam dados pela expressão 3.7.

$$v_{proper} = u = v(r)\gamma = \frac{dl}{d\tau} \rightarrow \Delta\tau = \int_{-l_1}^{+l_2} \frac{dl}{v(r)\gamma} \quad (3.7)$$

em que  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v(r)}{c}\right)^2}}$  e  $v(r)$  é a velocidade radial do viajante medida por um observador estático. Deste modo,  $\Delta\tau <$  tempo de vida do corpo.

Para ter informações sobre as acelerações experienciadas pelo corpo, inclusive, as forças de maré, é necessário determinar o conjunto de vetores da base relacionados ao referencial próprio, ou seja, o qual o corpo estará sempre em repouso com relação a essa base. Partindo do sistema  $(t, r, \theta, \varphi)$ , em que os vetores da base são  $(\mathbf{e}_t, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi)$ , vamos construir uma base de modo que a métrica nessa nova base seja a métrica de Minkowski, já que se trata do referencial próprio. A essa base de vetores, damos o nome de tetrada (24).

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{\hat{t}} &= \exp(-\phi)\mathbf{e}_t; \\ \mathbf{e}_{\hat{r}} &= \left(1 - \frac{b}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \mathbf{e}_r; \\ \mathbf{e}_{\hat{\theta}} &= r^{-1}\mathbf{e}_\theta; \\ \mathbf{e}_{\hat{\varphi}} &= (r \sin \theta)^{-1} \mathbf{e}_\varphi, \end{aligned} \quad (3.8)$$

em que  $(\mathbf{e}_{\hat{t}}, \mathbf{e}_{\hat{r}}, \mathbf{e}_{\hat{\theta}}, \mathbf{e}_{\hat{\varphi}})$  formam os vetores da base no referencial próprio. A métrica  $g_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = \eta_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$ . Assim, a transformação dos vetores dessa base seguem as transformações de Lorentz, da Relatividade Restrita.

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{\hat{t}'} &= \mathbf{u} = \gamma [\mathbf{e}_{\hat{t}} \pm v\mathbf{e}_{\hat{r}}]; \\ \mathbf{e}_{\hat{r}'} &= \gamma [\pm\mathbf{e}_{\hat{r}} + v\mathbf{e}_{\hat{t}}]; \\ \mathbf{e}_{\hat{\theta}'} &= \mathbf{e}_{\hat{\theta}}; \\ \mathbf{e}_{\hat{\varphi}'} &= \mathbf{e}_{\hat{\varphi}}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

Como o corpo se move radialmente, então, as componentes angulares da aceleração própria do corpo devem ser nulas. E, como o quadri-vetor aceleração é proporcional à quadri-velocidade, logo,  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_{\hat{t}'} = 0 \rightarrow a_{\hat{t}'} = 0$ . Assim  $\mathbf{a} = a\mathbf{e}_{\hat{r}'}$ , em que  $a$  é a magnitude da aceleração.

A força de maré trata da variação da aceleração em diferentes pontos do corpo. Seja  $\vec{\xi}$  o vetor espacial de separação entre duas partes do corpo. Então, a aceleração de maré entre estas partes fica sendo dada como:

$$\Delta a^{\hat{\alpha}'} = -R_{\hat{\beta}'\hat{\gamma}'\hat{\delta}'}^{\hat{\alpha}'} u^{\hat{\beta}'} \xi^{\hat{\gamma}'} u^{\hat{\delta}'}, \quad (3.10)$$

em que  $R_{\hat{\beta}'\hat{\gamma}'\hat{\delta}'}^{\hat{\alpha}'}$  são os componentes do tensor de Riemann no referencial próprio do corpo. Utilizando 3.8 e sabendo também que  $\xi^{\hat{t}'} = 0$ , já que se trata de um vetor espacial, então, a equação da aceleração de maré, 3.10, resume-se à expressão 3.11. E, conclui-se que esta aceleração é somente espacial.

$$\Delta a^{\hat{i}'} = -R_{\hat{t}'\hat{j}'\hat{t}'}^{\hat{i}'} \xi^{\hat{j}'}. \quad (3.11)$$

Assim, as condições de atravessabilidade são escolhidas de modo a não afetar a estrutura corpórea do viajante. No caso, por exemplo, de um ser humano com estatura de 1,8 m, temos o seguinte:  $|\xi| \approx 1,8$  m e  $|\Delta a^{\hat{i}'}| \lesssim g_{\oplus}$ , em que  $g_{\oplus}$  é definido como 1 gravidade terrestre. Com estas condições, podemos restringir a curvatura  $R_{\hat{t}'\hat{j}'\hat{t}'}^{\hat{i}'}$  de modo a garantir a integridade física do viajante. Uma escolha possível que garante uma força de maré pequena é impor  $\phi' \rightarrow 0$ , como feito do trabalho de Morris e Thorne (4).

### 3.2.2 Tensor de Energia-Momento

De modo a satisfazer o primeiro requisito, que a solução do wormhole precise obedecer as Equações de Campo de Einstein, então, o próximo passo é verificar as características do Tensor de Energia-Momento para gerar o wormhole e também as condições necessárias do tensor para que um objeto possa realizar a travessia.

Utilizando a base de vetores no referencial próprio 3.8, as componentes não nulas do tensor de Einstein estão expressas a seguir.

$$G_{\hat{t}\hat{t}} = \frac{b'}{r^2}, \quad (3.12)$$

$$G_{\hat{r}\hat{r}} = -\frac{b}{r^3} + 2 \left(1 - \frac{b}{r}\right) \frac{\phi'}{r}, \quad (3.13)$$

$$G_{\hat{\theta}\hat{\theta}} = G_{\hat{\varphi}\hat{\varphi}} = \left(1 - \frac{b'}{r^2}\right) \left[ \phi'' + \left(\frac{1}{r} - \frac{b'r - b}{2r(r - b)}\right) \phi' + \phi'^2 - \frac{b'r - b}{2r^2(r - b)} \right]. \quad (3.14)$$

Substituindo nas Equações de Campo de Einstein 2.1, e conhecendo o significado físico das componentes do tensor de energia-momento:  $T_{00} = \rho$  é a densidade de matéria-

energia do sistema,  $T_{11} = \tau$  é a pressão na direção radial e  $T_{22} = p$  e  $T_{33} = p \sin^2 \theta$  são as pressões, respectivamente, na direção  $\theta$  e  $\varphi$ .

$$\rho(r) = \frac{b'}{8\pi r^2}, \quad (3.15)$$

$$\tau(r) = \frac{b}{8\pi r^3} - 2 \left(1 - \frac{b}{r}\right) \frac{\phi'}{8\pi r}, \quad (3.16)$$

$$p(r) = \frac{1}{8\pi} \left(1 - \frac{b'}{r^2}\right) \left[ \phi'' + \left(\frac{1}{r} - \frac{b'r - b}{2r(r-b)}\right) \phi' + \phi'^2 - \frac{b'r - b}{2r^2(r-b)} \right]. \quad (3.17)$$

Com estas expressões para a densidade e pressões, podemos avaliar as condições de atravessabilidade. Verificamos que para o wormhole possuir uma garganta, então,  $r = b(r) = b_0$ , e para força de maré pequena, temos  $\phi' \rightarrow 0$ . Assim, na garganta, teremos  $\tau_0 = \frac{1}{8\pi b_0^2}$ . Retomando com as constantes  $c$  e  $G$ , temos que  $\tau_0 = \frac{c^4}{8\pi G b_0^2}$ , o que nas unidades do SI (Sistema Internacional de Unidades), significa que  $\tau_0 \approx \frac{4,8}{b_0^2} \times 10^{31} \frac{N}{m^2}$ , o que representa um valor muito grande. Para termos uma ideia da magnitude desta grandeza, o material cerâmico externo de um ônibus espacial suporta no máximo 360 GPa de compressão (25). Para que este ônibus atravesse o wormhole e, portanto,  $\tau_0$  tenha esse valor, é necessário que  $b_0$ , ou seja, o raio da garganta, meça  $1,15 \times 10^{15}$  metros. Essa medida é apenas 9 ordens de grandezas menor que o raio do universo observável em distância comóvel,  $4,40 \times 10^{26}$  metros (26).

Outro detalhe a ser analisado no wormhole atravessável e, provavelmente, a característica mais importante deste objeto, é a existência de matéria exótica.

Definimos a quantidade adimensional  $\zeta \equiv \frac{\tau - \rho c^2}{|\rho c^2|}$ . Utilizando as equações (3.15) e (3.16), então,  $\zeta = \frac{\frac{b}{r} - b' - 2(r-b)\phi'}{|b'|}$ . As condições para a garganta do wormhole implicam que, na garganta,  $\zeta_0 = \frac{1 - b'(b_0)}{|b'(b_0)|}$  e, pelo embedding diagram,  $\frac{d^2}{dz^2} r(b_0) = \frac{b_0(1 - b'(b_0))}{2b_0^2} > 0$ , na garganta. Assim,  $1 - b'(b_0) > 0$ , o que implica que  $\zeta_0 > 0$ .

Mas  $\zeta_0 = \frac{\tau_0 - \rho_0 c^2}{|\rho_0 c^2|} > 0$ , ou seja,  $\tau_0 - \rho_0 c^2 > 0 \Rightarrow \tau_0 > \rho_0 c^2$ . Fisicamente, este resultado significa que a tensão na garganta do wormhole excede a densidade total de matéria-energia. Ou seja, a quantidade de energia por metro deste objeto geométrico é maior que a quantidade de energia fornecida pela densidade total de matéria-energia no mesmo perímetro, na garganta. Intitulamos esse conteúdo de matéria exótica, por violar as condições de energia. Utilizando os conceitos do capítulo anterior, temos que a matéria exótica viola as condições de energia mais importantes.

### 3.2.3 Estabilidade

A análise de estabilidade destes wormholes consiste a parte central deste trabalho. Optamos por fazer a análise a partir dos chamados modos quasinormais (27). Na próxima seção, apresentaremos brevemente os fundamentos desta análise de estabilidade.

## 4 Modos quasinormais: uma revisão

Os modos ou frequências quasinormais  $\omega_n$  são soluções especiais de uma equação de onda que descrevem sistemas dispersivos. Estas soluções são modos próprios, ou seja, característicos quando o sistema é excitado por perturbação não radial (28). O exemplo mais simples deste comportamento são os osciladores harmônicos amortecidos da mecânica newtoniana. Neste oscilador, o sistema é formado pelo termo de mola e pela força de amortecimento, em sua maioria proporcional a derivada primeira da posição. Esta força tem característica resistiva e age, portanto, contrário ao movimento (29). A segunda lei de Newton, para este sistema, pode ser vista a seguir.

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (4.1)$$

em que  $\beta$  é o parâmetro de amortecimento,  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  é a frequência característica quando não há amortecimento,  $m$  é a massa do corpo e  $k$  é a constante de mola.

A solução geral da equação 4.1 é dada por:

$$x(t) = e^{-\beta t} \left[ A_1 e^{i\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t} + A_2 e^{-i\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} t} \right]. \quad (4.2)$$

em que  $A_1$  e  $A_2$  são constantes de integração. Observamos que  $e^{-\beta t}$  é o termo que faz o envelope do deslocamento, responsável pelo amortecimento.

Com essa analogia, podemos inferir que as frequências quasinormais  $\omega_n$  apresentarão um termo real e um termo imaginário, ou seja  $a + ib$ , onde  $b$  é responsável pela oscilação e  $a$  é o envelope. Se  $a < 0$ , então, a solução é caracterizada como amortecida. Veremos adiante que este amortecimento representa uma solução estável do sistema.

### 4.1 Modos quasinormais e estabilidade

Um dos primeiros estudos de estabilidade da métrica de Schwarzschild foi de Regge e Wheeler que estabeleceu um método de decompor qualquer perturbação em uma métrica de fundo esfericamente simétrica em modos quasinormais, utilizando harmônicos esféricos tensoriais (30). Basicamente, os autores mostraram que, com determinadas escolhas de calibre, as equações de perturbação para as partes radial e axial, podem ser reduzidas a uma equação de autovalor e autovetor, análoga à equação de Schrödinger, com potencial de barreira (28).

Foi em 1970 com o trabalho de Vishveshwara que as condições de contorno das soluções da equação de perturbação foram entendidas, gerando frequências imaginárias. O autor coloca como motivação principal se a solução de Schwarzschild é estável e, portanto, passível de existir na natureza:

“Unless the collapsed spherical configuration, or, equivalently, the Schwarzschild empty space metric, is proved to be stable against small perturbations, one cannot continue to treat them as entities that nature can allow to exist. *A priori* there is no definite reason to believe that the Schwarzschild spacetime does represent a stable configuration, and in the present work we prove formally that it is in fact stable against small perturbations.” (Vishveshwara, 1970) (30)

Neste trabalho, Vishveshwara utiliza o método de Regge-Wheeler nas coordenadas de Kruskal, em que se elimina a divergência da métrica em  $r = 2M$ , e diferenciou cada perturbação em dois casos, a saber,  $l = 1$  e  $l > 1$ , onde  $l$  é o número relacionado ao momento angular. Dentro destes dois casos, assumiu-se separadamente a forma da frequência  $k$  como número imaginário puro e real e, assim, colocou as condições de contorno tanto assintóticas quanto próximas ao horizonte de eventos. A conclusão do trabalho foi que os modos correspondentes a uma frequência com valor particular imaginário puro não poderiam ter existido no instante inicial  $t=0$ , pois, para tais casos, a solução contradiz com a suposição da perturbação ser pequena, fazendo com que a perturbação em questão não tenha sentido físico (30). As condições de contorno definidas pelo autor são dadas abaixo. Nesta dissertação utilizamos estas mesmas condições, mas para uma situação particular do wormhole minimal.

Para perturbações de paridade ímpar e paridade par, para o caso em que  $l > 1$ , onde  $l$  é o número de momento angular:

$$\begin{aligned} Q_\infty &\sim \exp(\pm\alpha r); \\ Q_{2m} &\sim \exp(\pm\alpha r^*), \end{aligned} \tag{4.3}$$

onde  $Q_\infty$  e  $Q_{2m}$  são, respectivamente, as formas das funções de onda assintóticas no infinito e próximo ao horizonte de eventos e  $r^*$  é a coordenada espacial tartaruga, definida como:

$$\frac{r^*}{2m} = \frac{r}{2m} + \ln\left(\frac{r}{2m} - 1\right). \tag{4.4}$$

Nestes casos, a frequência  $k$  foi considerada um imaginário puro, ou seja,  $k = i\alpha$ , onde  $\alpha$  é um número real e positivo.

Chandrasekhar e Detweiler trabalharam pela primeira vez diretamente com o cálculo e a teoria dos modos quasinormais, particularmente, para potenciais de barreira unidimensionais (28). Os autores estabeleceram a seguinte definição: um modo quasinormal

pertencente a uma dada frequência complexa é definido de tal modo que não haja onda incidente na barreira, ou seja, que há apenas onda refletida em  $+\infty$  e onda transmitida em  $-\infty$  (31). Esta é a definição que utilizaremos neste trabalho.

## 5 Wormhole minimal

O wormhole minimal que trataremos aqui foi introduzido em (7) com a ideia de diminuir ao máximo a existência de matéria exótica necessária em wormholes atravessáveis. Neste capítulo, apresentaremos de maneira sucinta este wormhole minimal e o caracterizaremos em termos do seu tensor de energia-momento e seu potencial efetivo para uma perturbação escalar não massiva. O wormhole descrito em (6), que denominaremos como Kar-Minwalla-Mishra-Sahdev (KMMS), tem a forma de Morris-Thorne com fator de forma dado por:

$$b(r) = r \left\{ 1 - \left[ 1 - \left( \frac{b_0}{r} \right)^n \right]^{2 - \frac{2}{n}} \right\}, \quad (5.1)$$

com  $r \geq b_0$ , em que  $b_0$  é o raio da garganta e  $n$  é um parâmetro livre. Definimos o wormhole minimal como sendo aquele para o qual  $n \rightarrow \infty$ .

Podemos introduzir a coordenada  $x$  tal que

$$r^n = b_0^n + |x|^n, \quad (5.2)$$

de modo que  $-\infty < x < +\infty$ , com  $x = 0$  correspondendo a garganta do wormhole. Em termos desta nova coordenada, a métrica de Kar-Minwalla-Mishra-Sahdev assume uma expressão mais simples:

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + r(x)^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (5.3)$$

No limite para o Wormhole Minimal (7), temos então que

$$r(x) = \begin{cases} b_0, & \text{se } |x| \leq b_0 \\ x, & \text{se } |x| > b_0. \end{cases} \quad (5.4)$$

### 5.1 Conteúdo de Matéria-Energia

Para avaliar o conteúdo de matéria-energia deste wormhole, substituímos a métrica KMMS (5.3) nas Equações de Campo da Relatividade Geral (2.1) e calculamos as componentes do tensor de Einstein dependendo do parâmetro  $n$ . Em seguida, fizemos  $n \rightarrow \infty$  para obter o tensor para o wormhole minimal em questão.

Para encontrar as componentes não nulas do tensor de Einstein  $G_{\mu\nu}$ , utilizamos o pacote “GREAT” (32) disponível para o *Mathematica*. Após algumas simplificações, as expressões não nulas são dadas por:

$$G_{00} = T_{00} = \rho = -\tau - 2p; \quad (5.5)$$

$$G_{11} = T_{11} = \tau; \quad (5.6)$$

$$G_{22} = T_{22} = p; \quad (5.7)$$

$$G_{33} = T_{33} = p \sin^2 \theta, \quad (5.8)$$

onde

$$\tau = \frac{1}{x^2} \left( \frac{1}{(1 + \mu^n)^2} - \frac{1}{(1 + \mu^n)^{\frac{2}{n}}} \right) \quad (5.9)$$

e

$$p = \frac{n-1}{x^2} \frac{\mu^n}{(1 + \mu^n)^2}, \quad (5.10)$$

são, respectivamente, as pressões nas direções  $x$  e  $\theta$ , onde  $\mu = \left| \frac{b_0}{x} \right|$ .

A partir das expressões acima, é fácil verificar que todas as condições de energia são violadas para  $n$  genérico.

Tomando-se o limite  $n \rightarrow \infty$ , temos a caracterização do conteúdo de matéria e energia para o wormhole minimal. Para a densidade de energia  $\rho$ , temos:

$$\rho(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } |x| > b_0 \\ \frac{1}{b_0^2}, & \text{se } |x| < b_0 \\ -\infty, & \text{se } |x| = b_0. \end{cases} \quad (5.11)$$

cuja representação grafica está apresentada na Figura 9.

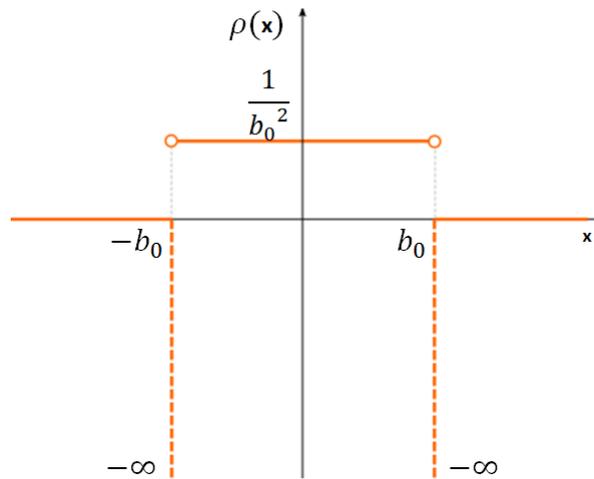


Figura 9 – Gráfico sem escala da densidade  $\rho(x)$  do wormhole minimal

Para a pressão  $\tau$ , temos:

$$\tau(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } |x| > b_0 \\ -\frac{1}{b_0^2}, & \text{se } |x| < b_0 \\ -\frac{3}{4b_0^2}, & \text{se } |x| = b_0. \end{cases} \quad (5.12)$$

cuja representação grafica está apresentada na Figura 10.

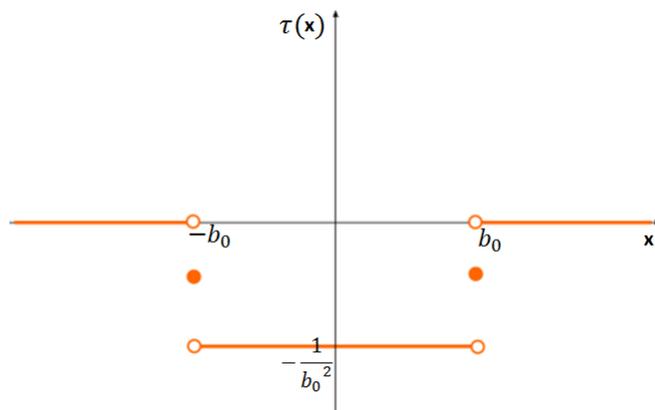


Figura 10 – Gráfico sem escala da pressão  $\tau(x)$  do wormhole minimal

Finalmente, para a pressão  $p$ , temos:

$$p(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } |x| > b_0 \\ 0, & \text{se } |x| < b_0 \\ +\infty, & \text{se } |x| = b_0. \end{cases} \quad (5.13)$$

cuja representação grafica está apresentada na Figura 11.

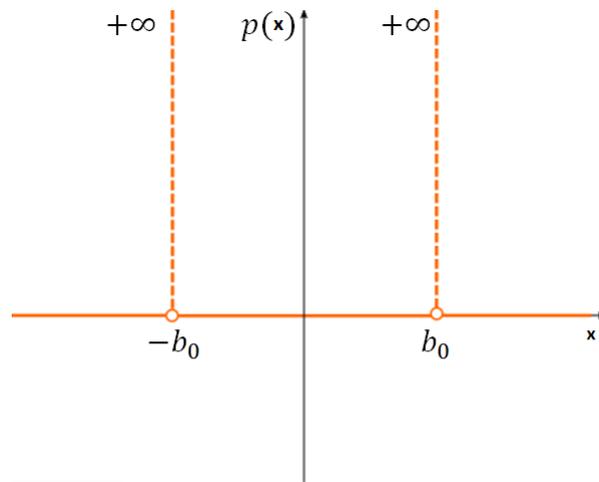


Figura 11 – Gráfico sem escala da pressão  $p(x)$  do wormhole minimal

É interessante destacar que as divergências que ocorrem na expressão de  $\rho$  e de  $p$  correspondem efetivamente a funções delta de Dirac,  $\delta$ . Para demonstrar este fato, vamos considerar a integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = \frac{2(n-1)}{b_0} \int_0^{\infty} \frac{\nu^{n-2}}{(1+\nu^n)^2} d\nu, \quad (5.14)$$

onde  $\nu = \frac{1}{\mu} = \left| \frac{x}{b_0} \right|$ .

Fazendo-se a mudança de variável  $\nu^n = y$ , podemos expressar esta integral em termos da função Beta  $B(a,b)$ .

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = \frac{2(n-1)}{nb_0} \int_0^{\infty} \frac{y^{-\frac{1}{n}}}{(1+y)^2} dy = \frac{2(n-1)}{nb_0} B\left(\frac{n-1}{n}, \frac{n+1}{n}\right), \quad (5.15)$$

de onde temos finalmente que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = \frac{2}{b_0}, \quad (5.16)$$

estabelecendo que a divergência em  $p$ , assim como em  $\rho$ , é integrável no sentido da função  $\delta$  de Dirac.

Estes resultados são relevantes, pois primeiramente o conteúdo de matéria com densidade total negativa é uma função delta negativa na garganta do wormhole, minimizando este tipo de matéria. Além disso, as três quantidades são nulas quando  $|x| > b_0$ , o que nos mostra que o conteúdo de matéria-energia do wormhole minimal não afeta as regiões (ou, os universos assintóticos) conectadas por ele.

## 5.2 Potencial Efetivo

O cálculo do potencial efetivo para uma partícula-teste escalar não massiva tem início com a Equação de Klein-Gordon 5.17 sem massa em espaço-tempo curvo.

$$\square\varphi = 0, \quad (5.17)$$

em que  $\square = \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_\alpha\sqrt{g}g^{\alpha\beta}\partial_\beta$ . E  $g = -\det(g_{\alpha\beta})$ .

Para facilitar, vamos primeiramente realizar o cálculo para uma métrica  $g_{\alpha\beta}$  genérica dada pela expressão 5.18. E depois, faremos a substituição para a métrica KMMS, 5.3.

$$ds^2 = -f(x)dt^2 + \frac{1}{f(x)}dl^2 + w(x)(d\theta^2 + \sin^2\theta) \quad (5.18)$$

Assim, a equação de Klein-Gordon 5.17 para a métrica 5.18 é dada por:

$$-\frac{1}{f(x)}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi + \frac{1}{w(x)}\frac{\partial}{\partial x}\left[wf\frac{\partial}{\partial x}\phi\right] + \frac{1}{w(x)}\left[\frac{1}{\tan\theta}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]\phi = 0. \quad (5.19)$$

Sabendo-se que  $\left[\frac{1}{\tan\theta}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right] = -L^2$ , onde  $L$  é o operador de momento angular e, considerando a propagação da partícula-teste como uma propagação de modos descritos em termos dos harmônicos esféricos, ou seja,  $\phi(x,\theta,\varphi,t) = \sum_{\ell m} C_{\ell m\omega} u_{\ell m\omega}(x) Y_{\ell m} e^{-i\omega t}$ , então, teremos que os modos  $u_{\ell m\omega}(x)$  deverão satisfazer a seguinte equação diferencial ordinária

$$-\frac{1}{w}\frac{d}{dx}\left(wf\frac{d}{dx}u\right) + \frac{\ell(\ell+1)}{w}u = \frac{\omega^2}{f}u, \quad (5.20)$$

sendo que, para não congestionar as notações, não representaremos mais os índices  $(\ell m\omega)$ . Note que o termo  $\ell(\ell+1)$  do autovalor do operador diferencial do momento angular:

$L^2 Y_{\ell m} = -\ell(\ell - 1)Y_{\ell m}$ . É conveniente fazer a transformação  $u = \frac{\Psi}{\sqrt{w}}$ . Desta maneira, a equação 5.20, assumirá a forma:

$$-f \frac{d}{dx} \left( f \frac{d}{dx} \Psi \right) + \left[ \frac{\ell(\ell + 1)f}{w} + \frac{f}{2\sqrt{w}} \frac{d}{dx} \left( \frac{fw'}{\sqrt{w}} \right) \right] \Psi = \omega^2 \Psi, \quad (5.21)$$

em que  $w' = \frac{d}{dx}w$ . Na equação 5.21, é possível identificar o potencial efetivo para a perturbação:

$$V_{\text{eff}} = \frac{f}{w} \ell(\ell + 1) + \frac{f\sqrt{w}}{2w} \frac{d}{dx} \left( \frac{fw'}{\sqrt{w}} \right). \quad (5.22)$$

Assim, reescrevemos a equação de modo a representar um problema de Espalhamento, análogo à Equação de Schrödinger independente do tempo, da Mecânica Quântica usual.

$$\left[ -\frac{d^2}{dx^2} + V_{\text{eff}}(x) \right] \Psi = \omega^2 \Psi. \quad (5.23)$$

Agora, podemos especificar as expressões para o nosso problema em questão. Pela métrica do wormhole KMMS dada em 5.3, temos que  $f(x) = 1$  e  $w(x) = r(x) = (b_0^n + |x|^n)^{\frac{1}{n}}$  e o Potencial efetivo, então, assume a forma:

$$V_{\text{eff}}(x) = \frac{1}{x^2} \left( \frac{\ell(\ell + 1)}{(1 + \mu^n)^{\frac{2}{n}}} + \frac{(n - 1)\mu^n}{(1 + \mu^n)^2} \right), \quad (5.24)$$

lembrando que  $\mu = \left| \frac{b_0}{x} \right|$ .

Para o caso do wormhole minimal, necessitamos tomar o limite  $n \rightarrow \infty$ . Assim, temos:

$$V_{\text{eff}}(x) = \begin{cases} \frac{\ell(\ell+1)}{b_0^2}, & \text{se } |x| \leq b_0 \\ \frac{\ell(\ell+1)}{x^2}, & \text{se } |x| > b_0, \end{cases} \quad (5.25)$$

cuja representação gráfica está na Figura 12. Como podemos apreciar, o potencial é parecido com o potencial caixa comumente empregado na Mecânica Quântica. Além disso, também é muito parecido ao potencial introduzido por Price nos primórdios dos estudos numéricos da estabilidade de buracos negros (31).

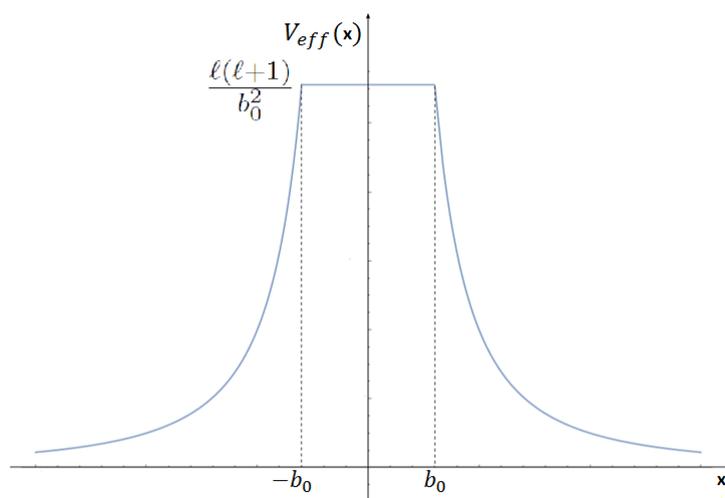


Figura 12 – Gráfico sem escala do potencial efetivo  $V_{\text{eff}}(x)$  do wormhole minimal para uma perturbação escalar não massiva

No próximo capítulo, discorreremos sobre os modos quasinormais do wormhole minimal.

## 6 Modos quasinormais para o wormhole minimal

Os modos quasinormais são obtidos partir de uma análise semelhante ao do problema de espalhamento na Mecânica Quântica. Para resolver 5.23 como Problema de Espalhamento, dividimos o Potencial efetivo do Wormhole Minimal (Fig. 12) em 3 regiões, conforme figura abaixo.

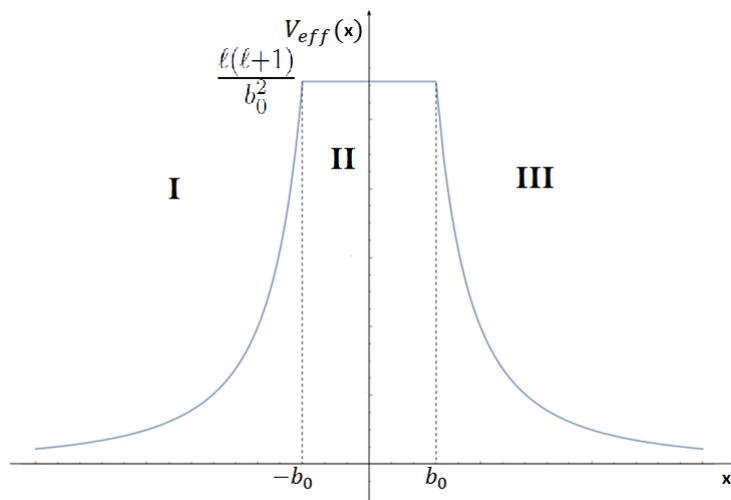


Figura 13 – Potencial efetivo  $V_{\text{eff}}$  do wormhole minimal separado em 3 regiões. Região I:  $x < -b_0$ , região II:  $-b_0 \leq x \leq b_0$  e, por fim, região III:  $x > b_0$

Devemos examinar a equação 5.23 nas três regiões. Nas regiões I e III, teremos:

$$\left[ -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\ell(\ell+1)}{x^2} \right] \Psi = \omega^2 \Psi. \quad (6.1)$$

cuja solução geral pode ser escrita como

$$\Psi(x) = a|x|j_\ell(\omega|x|) + b|x|y_\ell(\omega|x|), \quad (6.2)$$

com  $a$  e  $b$  constantes arbitrárias e  $j_\nu$  e  $y_\nu$  são as funções esféricas de Bessel de primeira e segunda espécie, respectivamente.

Por outro, na região II, teremos:

$$\left[ -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\ell(\ell+1)}{b_0^2} \right] \Psi = \omega^2 \Psi, \quad (6.3)$$

cuja solução geral é

$$\Psi(x) = Ce^{i\varpi x} + De^{-i\varpi x}, \quad (6.4)$$

com  $C$  e  $D$  constantes arbitrárias e

$$\varpi^2 = \omega^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{b_0^2}. \quad (6.5)$$

Conforme discutido no Capítulo 4, os modos quasinormais correspondem às soluções de 5.23 tais que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \Psi(x) &\propto e^{-i\omega x}, \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \Psi(x) &\propto e^{i\omega x}. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Neste ponto, é conveniente introduzir as funções esféricas de Hankel  $h_\nu^{(1)}$  e  $h_\nu^{(2)}$ , definidas a seguir.

$$h_\nu^{(1)}(s) = j_\nu(s) + iy_\nu(s), \quad (6.7)$$

$$h_\nu^{(2)}(s) = j_\nu(s) - iy_\nu(s), \quad (6.8)$$

as quais possuem as seguintes representações em série para ordens inteiras  $\ell$ :

$$h_\ell^{(1)}(s) = (-i)^{\ell+1} \frac{e^{is}}{s} \sum_{k=0}^{\ell} \frac{(n+k)!}{(-2is)^k k! (n-k)!}, \quad (6.9)$$

$$h_\ell^{(2)}(s) = i^{\ell+1} \frac{e^{-is}}{s} \sum_{k=0}^{\ell} \frac{(n+k)!}{(2is)^k k! (n-k)!}. \quad (6.10)$$

Comparando com 6.6, temos que as soluções que nos interessam nas regiões I e III são, respectivamente,

$$\begin{aligned} \Psi_I(x) &= A|x|h_\ell^{(2)}(\omega|x|) \\ \Psi_{III}(x) &= B|x|h_\ell^{(1)}(\omega|x|), \end{aligned} \quad (6.11)$$

com  $A$  e  $B$  constantes arbitrárias. O próximo passo é exigir continuidade de  $\Psi(x)$  e  $\Psi'(x) = \frac{d}{dx}\Psi$  nos pontos  $x = \pm b_0$ . De maneira análoga aos problemas de espalhamento em Mecânica Quântica elementar, teremos uma equação característica para as frequências (agora, complexas)  $\omega$ .

## 6.1 Equação característica

Da continuidade de  $\Psi(x)$  em  $x = \pm b_0$ , temos as equações

$$Ab_0h_\ell^{(2)}(\omega b_0) = Ce^{-i\varpi b_0} + De^{i\varpi b_0}, \quad (6.12)$$

$$Bb_0h_\ell^{(1)}(\omega b_0) = Ce^{i\varpi b_0} + De^{-i\varpi b_0}. \quad (6.13)$$

Por outro lado, da continuidade de  $\Psi'(x)$  em  $x = \pm b_0$ , temos

$$-A \left[ h_\ell^{(2)}(\omega b_0) + \omega b_0 g_\ell^{(2)}(\omega b_0) \right] = i\varpi C e^{-i\varpi b_0} - i\varpi D e^{i\varpi b_0}, \quad (6.14)$$

$$B \left[ h_\ell^{(1)}(\omega b_0) + \omega b_0 g_\ell^{(1)}(\omega b_0) \right] = i\varpi C e^{i\varpi b_0} - i\varpi D e^{-i\varpi b_0}, \quad (6.15)$$

sendo  $g_\nu^{1,2}(s) = \frac{d}{ds} h_\nu^{1,2}(s)$ . Estas quatro equações podem ser combinadas e escritas como o sistema linear

$$\underbrace{\begin{pmatrix} b_0 h_\ell^{(2)}(\omega b_0) & 0 & e^{-i\varpi b_0} & e^{i\varpi b_0} \\ 0 & b_0 h_\ell^{(1)}(\omega b_0) & e^{i\varpi b_0} & e^{-i\varpi b_0} \\ - \left[ h_\ell^{(2)}(\omega b_0) + \omega b_0 g_\ell^{(2)}(\omega b_0) \right] & 0 & i\varpi e^{-i\varpi b_0} & -i\varpi e^{i\varpi b_0} \\ 0 & \left[ h_\ell^{(1)}(\omega b_0) + \omega b_0 g_\ell^{(1)}(\omega b_0) \right] & i\varpi e^{i\varpi b_0} & -i\varpi e^{-i\varpi b_0} \end{pmatrix}}_M \begin{pmatrix} A \\ B \\ C' \\ D' \end{pmatrix} = 0, \quad (6.16)$$

onde  $C' = -C$  e  $D' = -D$ .

Os modos quasinormais são as soluções não triviais deste sistema. Para que elas existam, frequências quasinormais  $\omega$  devem satisfazer

$$\det M = 0, \quad (6.17)$$

e esta é a equação característica do problema.

A equação característica 6.17 é uma equação transcendental complexa para  $\omega$ , o que impede de se obter suas soluções analiticamente. Mesmo abordagens numéricas são complicadas devido à presença das funções de Hankel e suas derivadas. Contudo, há um limite fisicamente importante para o qual podemos obter as frequências complexas  $\omega$ : trata-se do caso com  $|\omega| \rightarrow \infty$ , que pode ser interpretado como o limite de grande atenuação, ou seja, aquele para o qual  $\Im\omega \rightarrow -\infty$ , de acordo com as definições do Capítulo 4. Para mais detalhes deste limite, ver (33).

Das representações em série 6.9 para  $|\omega|$  grande, podemos escrever

$$\Psi_I(x) \sim A' e^{-i\omega x}, \quad (6.18)$$

sendo  $A' = A \frac{i^{\ell+1}}{\omega}$ .

Da mesma forma,

$$\Psi_{III}(x) \sim B' e^{i\omega x}, \quad (6.19)$$

sendo  $B' = B \frac{(-i)^{\ell+1}}{\omega}$ .

Assim, é fácil verificar que a equação característica obtida a partir das aproximações assintóticas 6.18 e 6.19 é a mesma do clássico problema da barreira retangular na mecânica quântica (34). O sistema linear neste caso será

$$\underbrace{\begin{pmatrix} e^{i\omega b_0} & 0 & e^{-i\varpi b_0} & e^{i\varpi b_0} \\ 0 & e^{i\omega b_0} & e^{i\varpi b_0} & e^{-i\varpi b_0} \\ -i\omega e^{i\omega b_0} & 0 & i\varpi e^{-i\varpi b_0} & -i\varpi e^{i\varpi b_0} \\ 0 & i\omega e^{i\omega b_0} & i\varpi e^{i\varpi b_0} & -i\varpi e^{-i\varpi b_0} \end{pmatrix}}_{M'} \begin{pmatrix} A' \\ B' \\ C' \\ D' \end{pmatrix} = 0. \quad (6.20)$$

A matriz  $M'$  pode ser reduzida, por eliminação gaussiana, à seguinte forma:

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} e^{i\omega b_0} & 0 & e^{-i\varpi b_0} & e^{i\varpi b_0} \\ 0 & e^{i\omega b_0} & e^{i\varpi b_0} & e^{-i\varpi b_0} \\ 0 & 0 & i(\omega + \varpi)e^{-i\varpi b_0} & i(\omega - \varpi)e^{i\varpi b_0} \\ 0 & 0 & -i(\omega - \varpi)e^{i\varpi b_0} & -i(\omega + \varpi)e^{-i\varpi b_0} \end{pmatrix}, \quad (6.21)$$

a partir da qual podemos encontrar a equação característica para o problema:

$$\det \mathcal{M} = e^{2i\omega b_0} \left[ (\omega + \varpi)^2 e^{-2i\varpi b_0} - (\omega - \varpi)^2 e^{2i\varpi b_0} \right] = 0, \quad (6.22)$$

que, neste caso, reduz-se a

$$e^{-4i\varpi b_0} = \frac{(\omega - \varpi)^2}{(\omega + \varpi)^2}. \quad (6.23)$$

Note que, de 6.5, podemos escrever, para  $|\omega|$  grande,

$$\omega + \varpi \sim 2\omega \quad \text{e} \quad \omega - \varpi \sim \frac{\ell(\ell+1)}{2\omega b_0^2}, \quad (6.24)$$

e ficamos finalmente com a seguinte equação característica nesse limite:

$$e^{-4i\varpi b_0} = \frac{\ell^2(\ell+1)^2}{16\omega^4 b_0^4}, \quad (6.25)$$

cujas soluções podem ser escritas em termos da função  $W$  de Lambert, como veremos a seguir.

### 6.1.1 Soluções da equação característica

A equação característica 6.25 pode ser escrita como

$$ze^z = \frac{\sqrt{\ell(\ell+1)}}{2I_k}, \quad (6.26)$$

onde  $z = -i\omega b_0$  e  $k = 1 \dots 4$ , sendo  $I_k$  as quatro raízes da unidade. A função  $W(z)$  de Lambert é uma função analítica definida como a inversa (multivaluada) precisamente da função  $f(z) = ze^z$  e, portanto, temos que as soluções de 6.25 são

$$\omega = \frac{i}{b_0} W \left( \frac{\sqrt{\ell(\ell+1)}}{2I_k} \right), \quad (6.27)$$

com  $k = 1 \dots 4$ . Este resultado coincide com o obtido em (34). Podemos ter uma ideia da distribuição dos modos quasinormais com  $|\omega| \gg 1$  examinando com detalhes a função  $W(z)$  de Lambert. Vamos considerar explicitamente o caso  $I_k = -i$ , pois os outros são análogos. Escrevendo  $z = \alpha + i\beta$ , temos que 6.26 corresponde ao sistema:

$$e^\alpha (\alpha \cos \beta - \beta \sin \beta) = 0, \quad (6.28)$$

$$e^\alpha (\alpha \sin \beta + \beta \cos \beta) = \frac{\sqrt{\ell(\ell+1)}}{2}. \quad (6.29)$$

A primeira equação nos fornece

$$\alpha = \beta \tan \beta. \quad (6.30)$$

Já a segunda, corresponde a

$$e^{\beta \tan \beta} = \frac{\sqrt{\ell(\ell+1)} \cos \beta}{2\beta}, \quad (6.31)$$

para  $\cos \beta \neq 0$ .

A condição de estabilidade  $\Im \omega < 0$  corresponde a  $\Re z = \alpha < 0$ . A equação 6.31 tem infinitas soluções. Suas soluções correspondem ao encontro das duas funções correspondentes ao lado esquerdo e direito da igualdade. A função do lado esquerdo é uma função par e não negativa. Além disso, esta função se anula para  $\beta = (2n+1)\pi/2 + \epsilon$ , é igual a 1 para  $\beta = 2n\pi$ , e diverge para  $\beta = (2n+1)\pi/2 - \epsilon$ , para todo  $n \in \mathbb{Z}$ . Já o

lado direito, para  $|\beta|$  grande o suficiente, é limitado superiormente por 1. Isto pode ser verificado na figura a seguir 14, quando  $\ell = 1$ . Assim, os pontos de encontro entre as duas curvas sempre se dará em pontos tais que  $\alpha = \beta \tan \beta < 0$ , garantindo que  $\Im\omega < 0$  para grandes  $|\omega|$ .

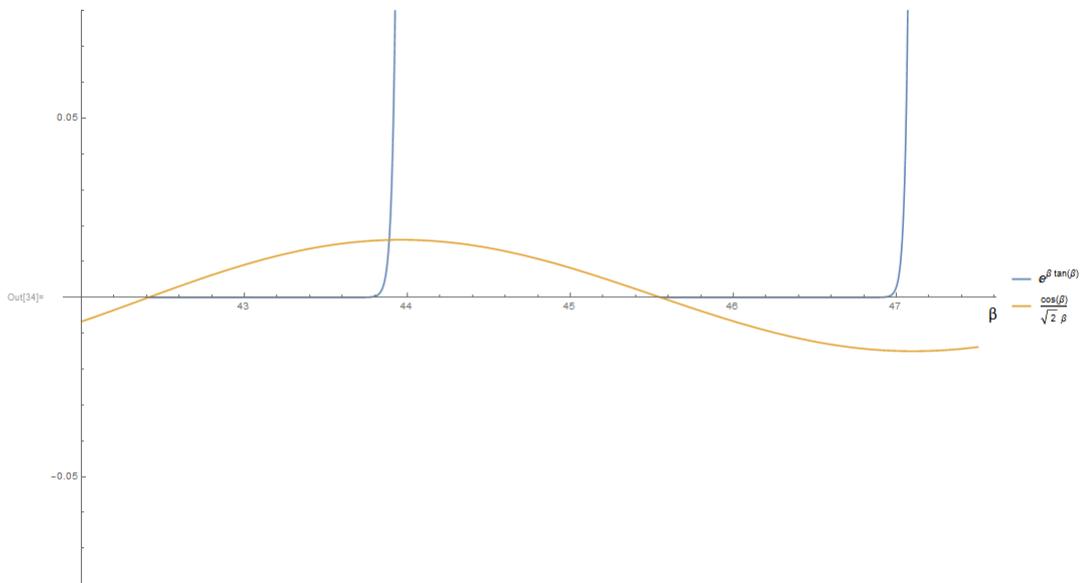


Figura 14 – Gráfico das funções  $e^{\beta \tan \beta}$  (linha em azul) e  $\frac{\sqrt{\ell(\ell+1)} \cos \beta}{\beta}$  (linha em amarelo) para  $\beta$  grande. Considerou-se  $\ell = 1$ .

## 7 Discussão e Conclusões

Esta dissertação elaborou uma revisão de alguns conceitos relevantes da Relatividade Geral, wormholes e modos quasinormais. Deste modo, ela pode ser vista como um guia para um estudante que queira se aprofundar nesses tópicos. Partindo do trabalho (7), encontramos uma expressão explícita para o potencial efetivo de excitações escalares. Mostramos que o limite de frequências quasinormais complexas  $\omega$  tais que  $|\omega| \gg 1$  se reduz a resultados conhecidos envolvendo o potencial barreira usual da Mecânica Quântica. Deve-se destacar que o tipo de wormhole minimal considerado neste trabalho pode ser considerado um “toy model” para a análise de soluções topologicamente mais complicadas, pois as ferramentas utilizadas neste trabalho são as mesmas para quaisquer análises de perturbação em outras geometrias espaço-temporais.

# Referências

- 1 VISSER, M. Lorentzian wormholes. *From Einstein to Hawking*, 412 pp.. AIP Press, 1996. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 26.
- 2 EINSTEIN, A.; ROSEN, N. The particle problem in the general theory of relativity. *Physical Review*, APS, v. 48, n. 1, p. 73, 1935. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 25.
- 3 MORRIS, M. S.; THORNE, K. S.; YURTSEVER, U. Wormholes, time machines, and the weak energy condition. *Physical Review Letters*, APS, v. 61, n. 13, p. 1446, 1988. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 27.
- 4 MORRIS, M. S.; THORNE, K. S. Wormholes in spacetime and their use for interstellar travel: A tool for teaching general relativity. *American Journal of Physics*, AAPT, v. 56, n. 5, p. 395–412, 1988. Citado 4 vezes nas páginas 12, 27, 28 e 30.
- 5 KONOPLYA, R. A.; ZHIDENKO, A. Passage of radiation through wormholes of arbitrary shape. *Phys. Rev.*, D81, p. 124036, 2010. Citado na página 12.
- 6 KAR, S. et al. Resonances in the transmission of massless scalar waves in a class of wormholes. *Physical Review D*, APS, v. 51, n. 4, p. 1632, 1995. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 36.
- 7 DADAM, F. *Wormhole solutions: scattering, stability and quasinormal modes*. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual de Campinas, <http://repositorio.unicamp.br/jspui/handle/REPOSIP/307130>, 2011. Citado 3 vezes nas páginas 12, 36 e 49.
- 8 EINSTEIN, A. The Foundation of the General Theory of Relativity. *Annalen Phys.*, v. 49, p. 769–822, 1916. Extraído de *The collected papers of Albert Einstein*, volume 6, Princeton University Press, 1997. Citado na página 14.
- 9 WALD, R. M. *General relativity*. [S.l.]: University of Chicago press, 2010. Citado na página 14.
- 10 EINSTEIN, A. On the electrodynamics of moving bodies. *Annalen Phys.*, v. 17, p. 891–921, 1905. [Annalen Phys.14,194(2005)]. Citado na página 14.
- 11 EINSTEIN, A. Manuscript on the special theory of relativity 1912-1914. *The Collected Papers of A. Einstein (Princeton, Academic Press, 1996)*, v. 4, p. 31, 1996. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 15.
- 12 EINSTEIN, A. The theory of relativity. *Naturforschende Gesellschaft in Zürich, Vierteljahresschrift*, v. 56, 1911. Extracted from *The collected papers of Albert Einstein* (Princeton University Press, 1993), v. 3. Citado na página 15.
- 13 LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. The classical theory of fields. Pergamon, 1971. Fourth Revised English Edition. Citado na página 15.

- 14 EINSTEIN, A. On the Relativity Problem. *Scientia*, v. 15, p. 337–348, 1914. Extracted from *The collected papers of Albert Einstein* (Princeton University Press, 1996), v. 4. Citado na página 15.
- 15 SCHWARZSCHILD, K. On the gravitational field of a mass point according to Einstein's theory. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)*, v. 1916, p. 189–196, 1916. Citado na página 15.
- 16 SAA, A. Cem anos de buracos negros: o centenário da solução de Schwarzschild. *Rev. Bras. Ens. Fis.*, v. 38, p. e4201, 2016. Citado na página 16.
- 17 EDDINGTON, A. S. A comparison of Whitehead's and Einstein's Formulae. *Nature*, v. 113, p. 192–192, 1924. Citado na página 16.
- 18 FINKELSTEIN, D. Past-future asymmetry of the gravitational field of a point particle. *Physical Review*, APS, v. 110, n. 4, p. 965, 1958. Citado na página 16.
- 19 CARROLL, S. M. *Spacetime and geometry. An introduction to general relativity*. [S.l.]: Pearson Education, 2004. Citado 3 vezes nas páginas 17, 18 e 19.
- 20 PENROSE, R. Gravitational collapse: The role of general relativity. *Riv. Nuovo Cim.*, v. 1, p. 252–276, 1969. [Gen. Rel. Grav.34,1141(2002)]. Citado na página 18.
- 21 PAPAPETROU, A. *Lectures on general relativity*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012. Citado na página 20.
- 22 EINSTEIN, A. Fundamental ideas and methods of the theory of relativity, presented in their development. *The Collected Papers of Albert Einstein (English translation)*, v. 7, p. 113–150, 1920. Pag. 136. Citado na página 21.
- 23 FULLER, R. W.; WHEELER, J. A. Causality and multiply connected space-time. *Physical Review*, APS, v. 128, n. 2, p. 919, 1962. Citado na página 26.
- 24 MISNER, C. W. et al. *Gravitation*. [S.l.]: Princeton University Press, 2017. Original edition published in 1973. Citado na página 29.
- 25 JENKINS, C.; KHANNA, S. *Mechanics of materials: a modern integration of mechanics and materials in structural design*. [S.l.]: Academic Press, 2005. P. 345. Citado na página 31.
- 26 BARS, I. et al. *Extra Dimensions in Space and Time*. [S.l.: s.n.], 2010. 27 p. Citado na página 31.
- 27 KONOPLYA, R.; ZHIDENKO, A. Quasinormal modes of black holes: From astrophysics to string theory. *Reviews of Modern Physics*, APS, v. 83, n. 3, p. 793, 2011. Citado na página 32.
- 28 FERRARI, V.; GUALTIERI, L. Quasi-normal modes and gravitational wave astronomy. *General Relativity and Gravitation*, Springer, v. 40, n. 5, p. 945–970, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 33 e 34.
- 29 THORTON, S. T.; MARION, J. B. *Classical dynamics of particles and systems*. [S.l.]: Thomson Brooks/Cole, 2004. Citado na página 33.

- 30 VISHVESHWARA, C. Stability of the schwarzschild metric. *Physical Review D*, APS, v. 1, n. 10, p. 2870, 1970. Citado 2 vezes nas páginas 33 e 34.
- 31 CHANDRASEKHAR, S.; DETWEILER, S. L. The quasi-normal modes of the Schwarzschild black hole. *Proc. Roy. Soc. Lond.*, A344, p. 441–452, 1975. Citado 2 vezes nas páginas 35 e 41.
- 32 Tristan Hubsch. *GREAT (General Relativity, Einstein and All That)*. <<http://library.wolfram.com/infocenter/MathSource/4781/>>. Download em 20/09/2018. Citado na página 37.
- 33 ANDERSSON, N.; HOWLS, C. J. The asymptotic quasinormal mode spectrum of non-rotating black holes. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 21, n. 6, p. 1623–1642, mar 2004. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088%2F0264-9381%2F21%2F6%2F021>>. Citado na página 45.
- 34 BOONSERM, P.; VISSER, M. Quasi-normal frequencies: key analytic results. *Journal of High Energy Physics*, Springer, v. 2011, n. 3, p. 73, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 46 e 47.
- 35 DAVIS, T. M.; LINEWEAVER, C. H. Expanding confusion: common misconceptions of cosmological horizons and the superluminal expansion of the universe. *Publications of the Astronomical Society of Australia*, Cambridge University Press, v. 21, n. 1, p. 97–109, 2004. Citado 2 vezes nas páginas 53 e 56.
- 36 HOBSON, M. P.; EFSTATHIOU, G. P.; LASENBY, A. N. *General relativity: an introduction for physicists*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2006. Citado na página 53.
- 37 HAWKING, S. W.; ELLIS, G. F. R. *The large scale structure of space-time*. [S.l.]: Cambridge university press, 1973. v. 1. Citado 2 vezes nas páginas 53 e 54.
- 38 RIPKEN, A. C. *Coordinate systems in De Sitter spacetime*. 2013. Bachelor Thesis at Radboud University Nijmegen. Acessado em 31/03/2018. Disponível em: <[www.ru.nl/publish/pages/760966/thesis\\_chris\\_ripken.pdf](http://www.ru.nl/publish/pages/760966/thesis_chris_ripken.pdf)>. Citado na página 54.

# APÊNDICE A – Horizontes na métrica de de Sitter: conceitos e definições

## A.1 Referenciais e distâncias

Antes de trabalhar com os horizontes precisamos definir os diferentes tipos de referenciais no contexto cosmológico.

Definição 1.1: Referencial próprio é o sistema de referência que se move junto com o observador.

Definição 1.2: Referencial comóvel é o sistema de referência que está em repouso com o fluido.

Definição 1.3: Distância própria no contexto cosmológico é a medida da geodésica espacial ao longo de uma hipersuperfície com tempo cósmico constante (35).

### A.1.1 Sistema de Coordenadas Comóveis

O sistema de coordenadas comóveis é formado por uma coordenada temporal  $t$  representando o tempo próprio do observador e três coordenadas espaciais  $(x^1, x^2, x^3)$ . Deste modo, cada hipersuperfície com  $t = \text{constante}$  será perpendicular à linha de mundo do observador (36), o que implica que a métrica para as coordenadas comóveis tem uma forma geral dada por:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - g_{ij} dx^i dx^j, \quad (\text{A.1})$$

em que  $i, j = 1, 2, 3$  e  $g_{ij}$  são funções das coordenadas  $(t, x^1, x^2, x^3)$ . É relevante ressaltar que a métrica nas coordenadas comóveis não incorpora, em sua forma geral, a propriedade de homogeneidade e isotropia do espaço.

## A.2 Espaço-tempo de de Sitter

O espaço-tempo de de Sitter é definido como sendo o espaço com escalar de Ricci  $R$  positivo (37). Este espaço pode ser representado como um hiperboloide embebido

em um espaço plano de 5 dimensões, ou seja,

$$ds^2 = -dv^2 + dw^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (\text{A.2})$$

Para chegarmos no modelo cosmológico estático de de Sitter, precisamos fazer duas transformações de coordenadas em (A.2): uma para o sistema  $(t, \chi, \theta, \phi)$  e outra para  $(\hat{t}, \hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$  (37). São elas:

$$\begin{aligned} v &= \alpha \sinh(\alpha^{-1}t), w = \alpha \cosh(\alpha^{-1}t) \cos \chi, \\ x &= \alpha \cosh(\alpha^{-1}t) \sin \chi \cos \theta, y = \alpha \cosh(\alpha^{-1}t) \sin \chi \sin \theta \cos \phi, \\ z &= \alpha \cosh(\alpha^{-1}t) \sin \chi \sin \theta \sin \phi. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

$$\begin{aligned} \hat{t} &= \alpha \log \frac{w+v}{\alpha}, \hat{x} = \frac{\alpha x}{w+v}, \\ \hat{y} &= \frac{\alpha y}{w+v}, \hat{z} = \frac{\alpha z}{w+v}. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

O sistema de coordenadas  $(t, \chi, \theta, \phi)$  cobre todo o hiperboloide, de modo que as superfícies  $t = \text{constante}$  possuem curvatura  $k = +1$ .

### A.3 Universo cosmológico de de Sitter

O modelo cosmológico de de Sitter é caracterizado pelo tensor de energia-momento correspondendo unicamente a uma constante cosmológica. A métrica de de Sitter tem a forma:

$$ds^2 = -dt^2 + e^{\frac{2t}{\alpha}} (dr^2 + r^2 d\Omega^2) \quad (\text{A.5})$$

Substituindo (A.5) nas Equações de Einstein (2.1), com tensor de energia-momento  $T_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu}$ , ou seja,  $R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu}$  (38), encontramos a dependência de  $\alpha$  com a constante cosmológica:

$$\alpha^2 = \frac{3}{\Lambda}. \quad (\text{A.6})$$

Como estamos interessados apenas na forma dos horizontes de eventos e dos horizontes cosmológicos, foi escolhido arbitrariamente  $\alpha = 1$ . Esta escolha respeita o formato dos cones de luz, mas torna a escala temporal arbitrária, não seguindo a cronologia do universo.

Faremos a análise da métrica de de Sitter numa seção transversal do espaço-tempo, considerando  $\theta$  e  $\phi$ , das coordenadas esféricas, constantes. Isso faz com que o termo  $d\Omega$  da métrica possa ser ignorado e, assim, conseguimos produzir gráficos bidimensionais sem perder a forma do horizonte e dos cones de luz em questão. A métrica para a realização dos gráficos se torna então:

$$ds^2 = -dt^2 + e^{\frac{2t}{\alpha}} dr^2. \quad (\text{A.7})$$

### A.3.1 Cones de Luz

Definição 2.1: O cone de luz de uma métrica é o espaço gerado quando  $ds^2 = 0$ .

Utilizando-se esta definição, temos que os cones de luz para o modelo cosmológico de de Sitter são dados pelas curvas:

$$dr = dt e^{\frac{-t}{\alpha}}, \quad (\text{A.8})$$

cuja solução é simplesmente

$$r(t) = -\alpha e^{\frac{-t}{\alpha}} \quad (\text{A.9})$$

### A.3.2 Cones de Luz em termos da distância própria

Sabemos que a distância própria do observador nos modelos cosmológicos é dada por  $D(t) = a(t)r$ , em que  $a(t)$  é o fator de escala. Para o caso em questão, colocolocando  $ds^2 = 0$  temos, então, os cones de luz

$$D(t) = (c_1 + t) e^{\frac{2t}{\alpha}} \quad (\text{A.10})$$

$$D(t) = (c_2 - t) e^{\frac{2t}{\alpha}} \quad (\text{A.11})$$

onde  $c_1$  e  $c_2$  são constantes de integração.

### A.3.3 Observadores Comóveis

O observador comóvel na métrica (A.7) será simplesmente  $r = \text{constante}$ , já que no caso do universo de de Sitter o comóvel está em repouso, de acordo com a proposição 1.1. Já o observador comóvel no referencial próprio se faz com  $dr = 0$  em (??), ou seja,

$(\dot{D} - \frac{2D}{\alpha}) e^{\frac{-4t}{\alpha}} dt = 0$ . A curva do observador comóvel em termos da distância própria em função do tempo é dada por:

$$D(t) = C e^{\frac{2t}{\alpha}}, \quad (\text{A.12})$$

em que  $C$  é uma constante de integração.

### A.3.4 Horizontes Cosmológicos

Utilizamos as definições da referência (35).

Definição 3.1: O Horizonte de Partículas é distância para o qual a luz pode ter viajado de  $t = 0$  até um dado instante  $t$ .

Definição 3.2: O Horizonte de Eventos é a distância para o qual a luz pode viajar de um dado instante  $t$  até  $t = \infty$ .

Em suma, utilizando o conceito de cones de luz, podemos reinterpretar estas definições de forma que o horizonte de partículas é o cone de luz futuro em  $t=0$  que para no instante  $t$ , enquanto que o horizonte de eventos é o cone de luz passado no instante  $t = \infty$ .

### A.3.5 Descrição gráfica dos cones de luz e horizontes cosmológicos

Seguindo a análise descrita anteriormente, podemos elaborar os gráficos do horizonte de partículas e horizonte cosmológico, tanto nas coordenadas próprias quanto nas coordenadas comóveis. Os resultados podem ser vistos nas figuras 15, 16 e 17.

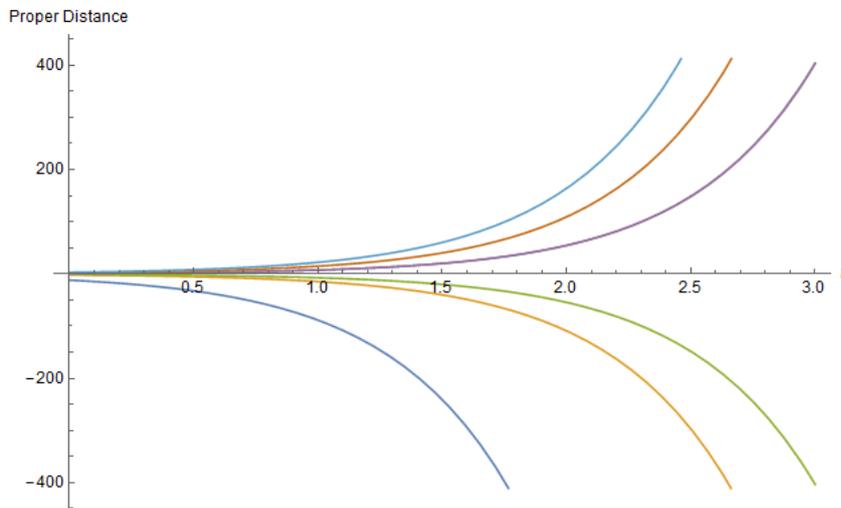


Figura 15 – Observadores comóveis descritos em termos do tempo e da distância própria

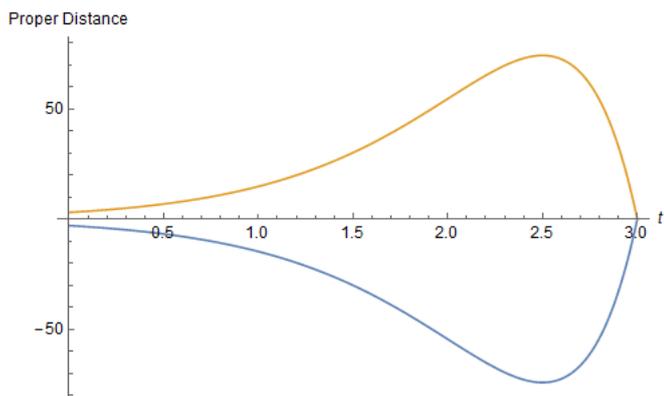


Figura 16 – Cone de luz passado descrito em termos do tempo e da distância própria. De acordo com a definição, se calculado em  $t = \infty$ , esse gráfico representa o horizonte de eventos na métrica de *de Sitter*.

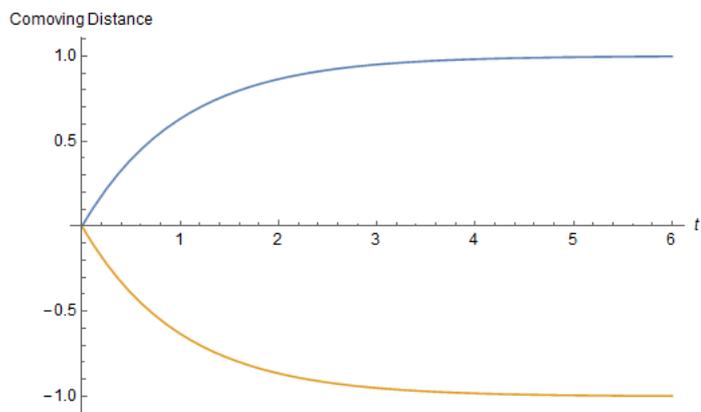


Figura 17 – Cone de luz futuro descrito em termos do tempo próprio e da distância comóvel. De acordo com a definição, esse gráfico representa o horizonte de partículas na métrica de *de Sitter*.